Д. Ю. ПАНОВ

СЧЁТНАЯ ЛИНЕЙКА



Д. Ю. ПАНОВ

СЧЁТНАЯ ЛИНЕЙКА

ИЗДАНИЕ ШЕСТНАДЦАТОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

АННОТАЦИЯ

Назначение этой книги — научить считать на счётной линейке и служить справочником в дальнейшей работе для лиц, уже умеющих пользоваться линейкой.

Книга разбита на два концентра. Первый концентр обучает простейшим вычислениям (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня), которых достаточно, впрочем, для большинства практических расчётов; этот концентр доступен любому читателю с семиклассным образованием. Второй концентр обучает более сложным вычислениям (включая вычисления с перевёрнутым движком, логарифмы, тригонометрические вычисления и решение трёхчленных уравнений) и требует бо́льшей математической подготовки.

Книга может служить учебным пособием при прохождении соответствующего раздела курса математики для учащихся школ, техникумов и вузов.

Настоящее издание печатается с включением раздела о линейках с двойными логарифмическими шкалами.

Панов Дмитрий Юрьевич.
СЧЁТНАЯ ЛИНЕЙКА.

М., Физматгиз, 1962 г., 160 стр. с илл.

Редактор *Угарова Н. А.*

Техн. редактор *Брудно К. Ф.* Корректор *Сигал О. А.*

Печать с матриц. Подписано к печати 21/VII 1962 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 10+5 вкл. Условн. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 11,03. Тираж 100 000 экз. Т-00958. Цена книги 33 коп. Заказ № 3293.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТЫРНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Круг лиц, для которых в основном предназначена эта книжка, это — читатели, имеющие уже небольшую математическую подготовку.

Назначение книжки — научить считать на счётной линейке и в известной мере служить справочником в дальнейшей работе для человека, уже выучившегося по ней считать.

Книга разбита на два концентра. Первый концентр заключает в себе сведения, необходимые для того, чтобы выучиться делать на линейке простейшие вычисления, достаточные, впрочем, для большинства практических расчётов; этот концентр может быть усвоен читателями, имеющими самую незначительную подготовку. Второй концентр обнимает более сложные вычисления (включая вычисления с перевёрнутым движком, логарифмы, тригонометрические вычисления и решение трёхчленных уравнений).

В настоящее издание книжки включён новый большой раздел, посвящённый счётным линейкам с двойными логарифмическими шкалами. Автор счёл нужным включить этот раздел в книжку потому, что за последнее время часто приходится иметь дело с вычислениями, требующими подобных линеек. Линейки с двойными логарифмическими шкалами приобретают всё большее распространение. При этих условиях дать сведения о таких линейках представляется необходимым.

Эта книжка рассчитана на то, чтобы читатель, знакомящийся по ней с работой на счётной линейке, не ограничивался одним чтением. Эту книжку нельзя «прочесть»: её можно только проработать с карандашом и счётной линейкой в руках.

Всех, познакомившихся с этой книжкой и желающих высказать какие-либо свои соображения о ней, просим писать по адресу: г. Москва, Ленинский пр., 15, физматгиз, автору книги Д. Ю. Панову.

Автор благодарит всех своих многочисленных корреспондентов, приславших отзывы об этой книжке, и в частности тт. Вишнякова (Грозный), Динабургского (Харьков), Ливанова (Энгельс), Формальского (Харьков), Зорина (Жмеринка), Романова (Москва), Шалангина (Сарата, Одесской области), отдельные замечания которых учтены при подготовке этого издания.

ВВЕДЕНИЕ

1. В настоящее время ни один технический работник не может считаться полноценным, если он не умеет считать на счётной линейке. Да это и понятно. На вопрос, сколько весит чугунная болванка диаметром 130 *мм*, длиной 250 *мм*, человек, не умеющий считать на линейке, считая в уме, отвечает, примерно, так: «Диаметр — 130, значит, площадь основания, примерно, $130^2:4\cdot3{,}1$, это будет около $\frac{16\,900}{4}\cdot3{,}1$, а это, примерно, равно $4200\cdot3{,}1=13\,000$ *мм*². Объём будет около $13\,000\cdot250=3\,250\,000$ *мм*³ $=3{,}25$ *дм*³. Удельный вес чугуна — 7,2, значит, вес болванки около $3{,}25\cdot7{,}2=23$ *кг*». На это уходит времени по меньшей мере $1^1/_2$ минуты при большом навыке к вычислению в уме. Человек, умеющий считать на линейке, даст ответ на этот вопрос через десять секунд: «Вес болванки 23,6 *кг*».

Счётная линейка обладает целым рядом достоинств.

При сравнительной своей компактности она позволяет производить расчёты, вообще говоря, с тремя верными знаками (чего вполне достаточно для всех почти практических вычислений), притом во много раз быстрее, чем на любом другом счётном аппарате, не говоря уже о вычислениях «на бумаге»; работа на счётной линейке не утомительна, а обращение с ней очень несложно.

По этим причинам счётная линейка применяется для всех технических расчётов, сводя необходимую вычислительную работу к минимуму.

Распространение счётной линейки характеризует, до некоторой степени, технический уровень страны, так как там, где привилась счётная линейка — конец расчётам «на глазок» и «на авось». Не только каждый инженер и техник, но и рабочий высокой квалификации должны уметь пользоваться счётной линейкой. Мы ставим себе в этом руководстве задачу научить пользоваться линейкой (по крайней мере для простейших вычислений) даже не очень квалифицированных работников заводов и фабрик, технических и счётных учреждений.

2. Для того чтобы выучиться считать на счётной линейке, необходимо не только усвоить её устройство, принципы её действия и приёмы счёта на ней, но — и это самое главное — фактически считать на ней. Все качества хорошего счётчика — быстроту,

лёгкость, точность, уверенность в работе с линейкой — можно приобрести только непрестанной практикой.

3. В этой книжке нет разделения материала на «теорию» и «задачи». И то и другое слито в одно органическое целое. Поэтому при чтении этой книжки нужно проделывать одновременно все указанные в ней упражнения и притом именно в том месте, где они указаны. Пропускать их нельзя: при пропуске некоторых упражнений всё дальнейшее будет непонятно (в особенности это относится к первому концентру). Книжку нужно проработать с начала и до конца.

Для того чтобы выучиться основным приёмам счёта, достаточно первого концентра; чтобы узнать линейку лучше и подробнее, необходимо проработать оба концентра.

Напечатанное мелким шрифтом при чтении можно пропустить без ущерба для понимания книжки. По большей части это — пояснения, предназначенные для интересующихся математической стороной дела.

В конце даны ответы на задачи вычислительного характера; задачи, содержащие наводящие вопросы или представляющие собой задание для самостоятельной проработки, как правило, даны без ответов. Только для таких вопросов, неверный ответ на которые может привести к неправильному пониманию дальнейшего текста, даны ответы в конце книги.

● *Нельзя злоупотреблять «ответами»! Помните, что в практической работе «ответов» для проверки не бывает. Учитесь сами контролировать свои решения.*

ПЕРВЫЙ КОНЦЕНТР

I. НА ЧЁМ ОСНОВАНО УСТРОЙСТВО СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙКИ

Механическое сложение

§ 1. При помощи любого масштаба можно выполнять сложение. Возьмём циркулем по масштабу отрезок в 3 *см* (рис. 1) и приставим одну ножку циркуля к штриху *4*; тогда вторая ножка придётся на штрих, соответствующий сумме 3 *см* + 4 *см*, и, чтобы узнать, чему эта сумма равна, нам нужно будет только прочитать число, стоящее около

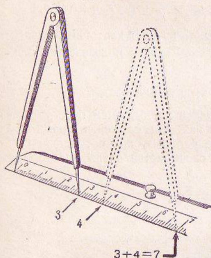


Рис. 1.

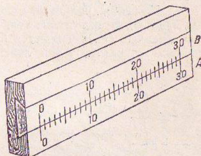


Рис. 2.

этого штриха, в данном случае *7*. Пользуясь этим обстоятельством, можно построить простой прибор для механического сложения. Он будет представлять собой линейку *А* (рис. 2), в пазу которой может передвигаться другая линейка *В*. На обеих линейках, подвижной и неподвижной, нанесена одна и та же шкала (как на масштабе рис. 2). Пользование этим прибором очень просто: чтобы сложить два каких-нибудь числа, например 8 и 17, нужно только передвинуть подвижную линейку так, чтобы её начало — штрих *0* — пришлось против штриха *8* на неподвижной линейке (рис. 3). Тогда тот штрих неподвижной

линейки, который придётся против штриха *17* на подвижной, и укажет нам величину суммы. Действие сложения выполняется здесь при помощи передвигания подвижной линейки и прочитывания готового

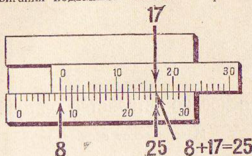


Рис. 3.

результата. Подвижная линейка со шкалой играет в этом приборе роль циркуля.

Модель такой линейки можно сделать из двух картонных полосок.

1.[1]) Легко понять, что такой линейкой можно пользоваться и для вычитания. Сообразите, как именно.

Механическое умножение

§ 2. Линейки, подобные описанной в предыдущем параграфе, на самом деле не изготовляются, так как для сложения и вычитания обыкновенные счёты являются более удобным приспособлением. Но принцип устройства такой линейки оказывается очень целесообраз-

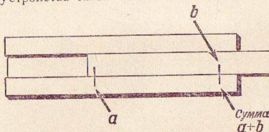


Рис. 4.

ным при построении аналогичного прибора д л я у м н о ж е н и я. Механизация вычисления при помощи линейки для сложения заключается в том, что для сложения двух чисел a и b достаточно передвинуть движок (подвижную линейку) и просто п р о ч е с т ь с у м м у (рис. 4). Ясно, что если бы удалось построить такую линейку, в кото-

[1]) Жирными цифрами указаны номера задач и упражнений.

рой при аналогичной передвижке против числа b получилась бы не сумма, а произведение $a \cdot b$ (рис. 5), то эта линейка представляла бы собой прибор, механизирующий умножение. Вся хитрость здесь заключается в шкалах; постараемся разобрать, каковы же должны быть эти шкалы на линейке для умножения.

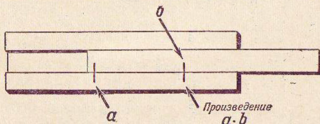


Рис. 5.

Допустим, что у нас уже есть две шкалы, обе одинаковые и дающие произведение таким же путём, как обыкновенные шкалы масштаба дают сумму. Это значит, что, установив начало одной из шкал против числа a на второй, получим произведение $a \cdot b$ на второй же шкале, против числа b на первой (рис. 6). Прежде всего разберём вопрос:

Какое число должно стоять в начале шкалы умножения?

§ 3. Обозначим это число через x и поставим обе наши шкалы так, чтобы их начальные штрихи совпадали. Тогда, по основному

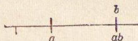


Рис. 6.

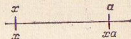


Рис. 7.

свойству шкал, против какого-нибудь числа a верхней шкалы на нижней окажется произведение ax (рис. 7, см. также рис. 6). Но так как обе шкалы одинаковые и начальные штрихи их установлены друг против друга, то

$$ax = a,$$

или

$$x = 1.$$

Таким образом, в начале шкалы для умножения должна стоять единица.

Это обстоятельство является непосредственным следствием того, что единица для умножения выполняет ту же роль, что нуль для сложения: от умножения на единицу и от прибавления нуля число не меняется, и подобно тому как обычные шкалы, которые можно применить для сложения, начинаются с нуля, шкала для умножения должна начинаться с единицы.

Неравномерность шкалы умножения

§ 4. Попробуем теперь подробнее разобрать строение шкалы умножения, или логарифмической шкалы, как она чаще называется; для этого мы её изготовим. Отметим начальный штрих и, выбрав отрезок *1—2* (например, в 1 *см* длиною), нанесём штрих, соответствующий числу *2* (рис. 8, *a*). Отложив теперь от этого штриха тот же отрезок *1—2*, мы должны будем отметить на нашей шкале против его конца произведение 2·2=4 (рис. 8, *b*). Продолжая это построение и рассуждая аналогичным образом, мы нанесём на шкале штрихи, соответствующие 8, 16, 32, ... (рис. 8, *c* и *d*). Сравним теперь полученную шкалу со шкалой для сложения. Прежде всего мы видим, что новая шкала значительно короче старой (рис. 9); она сжата, и притом неравномерно. В начале она даже несколько шире, чем шкала для сложения (например, промежуток *1—2*), но зато к концу промежутки всё больше укорачиваются, и проме-

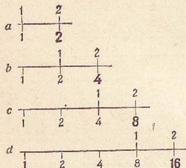


Рис. 8.

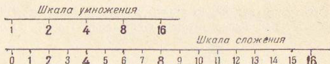


Рис. 9.

жуток *8—16*, например, уже вчетверо короче соответствующего промежутка старой шкалы.

Итак, шкала для умножения неравномерна.

На построенной нами шкале умножения нанесены только те штрихи, которые соответствуют числам 2^n. Если нанести на шкалу штрихи,

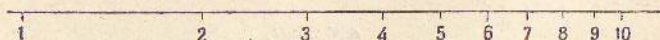


Рис. 10.

соответствующие всем целым числам от 1 до 10, то она будет иметь вид, изображённый на рис. 10. На этом чертеже отчётливо видна неравномерность шкалы умножения.

Читателям, знакомым с основами теории логарифмов, будет очень легко понять, как строится шкала умножения. Одно из основных свойств логарифмов заключается, как известно, в том, что

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b.$$

Поэтому, если штрих для числа 2 поставить в конце отрезка, длина которого равна $m \log 2$ (здесь m — выбранная единица масштаба, например 100 *мм*), штрих *3* — в конце отрезка длиной $m \log 3$ и т. д., то при сложении двух каких-нибудь отрезков, например от 1 до 2 (равного $m \log 2$) и от 1 до 3 (равного $m \log 3$), мы получим отрезок, длина которого равна:

$$m \log 2 + m \log 3 = m (\log 2 + \log 3) = m \log 2 \cdot 3 = m \log 6,$$

т. е. такой отрезок, в конце которого будет стоять штрих *6*, указывающий произведение $2 \cdot 3$.

На черт. 10 изображена шкала умножения при $m = 80$ *мм*. Так как $\log 10 = 1$, то весь отрезок от 1 до 10 равен 80 *мм*. Штрих *2* нанесён на расстоянии $80 \cdot \log 2 = 24{,}1$ *мм* от начала, штрих *3* — на расстоянии $80 \cdot \log 3 = 38{,}2$ *мм* и т. д. Проверить это можно по масштабу. В начале шкалы стоит 1 и $\log 1 = 0$.

Периодичность шкалы умножения

§ 5. Мы познакомимся с очень важным свойством шкалы умножения, если продолжим её вправо от 10 или влево от 1. Изготовим вторую шкалу умножения (такую же, как на рис. 10) и приложим её к концу первой шкалы (рис. 11), так, чтобы стоящая в начале её

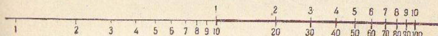


Рис. 11.

единица пришлась против 10 первой шкалы. Тогда продолжение первой шкалы можно нанести за 10 вправо: по основному свойству шкалы умножения против штриха *2* второй шкалы на первой шкале должен находиться штрих *20*[1]), против штриха *3* — штрих *30* и т. д. до штриха *100*, который придётся против конца второй шкалы. Таким образом у нас получилось продолжение первой шкалы до 100; приложив начало второй шкалы к новому штриху *100*, мы таким же путём сможем продолжить нашу шкалу до 1000 ($= 100 \cdot 10$) и т. д. Совершенно аналогичным способом можно продолжить шкалу влево от единицы. Приложим вторую шкалу концом к началу основной (первой) шкалы; при этом будут совпадать штрих *10* второй шкалы и штрих *1* первой. Сообразим, прежде всего, какое число должно стоять на основной шкале против начала второй шкалы. Пусть это число будет x. Тогда, по основному свойству шкалы, против штриха *10* второй шкалы должно получиться число $10x$. Но мы установили вторую шкалу так, что против *10* стоит *1*, значит

$$10x = 1, \text{ т. е. } x = 0{,}1.$$

А теперь уже легко нанести все числа первой шкалы, стоящие против *2*, *3* ... на второй. Очевидно, против *2* должно быть *0,2* (так

[1]) $20 = 10 \cdot 2$; $30 = 10 \cdot 3$ и т. д.

как 0,2 = 0,1·2), против *3—0,3* и т. д. (рис. 12). Таким образом шкала продолжена влево до *0,1*. Таким же точно способом мы можем продолжить её ещё дальше влево, сначала до *0,01*, потом до *0,001* и т. д.

Из самого построения очевидно, что отрезок шкалы от *1* до *2* в точности равен отрезку от *10* до *20*, или от *100* до *200*, или от *1000* до *2000*, или от *0,1* до *0,2* и т. д.; отрезок *1—3* равен отрезкам *10—30*;

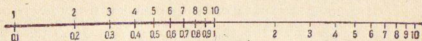


Рис. 12.

100—300; *0,1—0,3* и т. д.; одним словом, все промежутки направо от десяти (*10—100*), (*100—1000*) и т. д. и налево от единицы (*0,1—1*), (*0,01—0,1*) и т. д. в точности повторяют основной промежуток от *1* до *10*; только числа, приписываемые в них тем же штрихам, в 10, 100, 1000, ... раз больше или меньше чисел основного промежутка.

2. Начертите на прозрачной кальке шкалу умножения (использовав для этого рис. 10) в пределах от 0,1 до 1000. Разрежьте её на равные отрезки: от 0,01 до 0,1; от 0,1 до 1; от 1 до 10; от 10 до 100; от 100 до 1000. Накладывая эти отрезки друг на друга, можно убедиться в совпадении соответствующих штрихов (рис. 13).

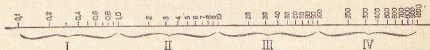


Рис. 13.

Итак, шкала умножения периодична. Свойство это исключительно важное: оно позволяет всю бесконечную шкалу умножения заменить одним её отрезком, например, основным промежутком от 1 до 10. Для перемножения 20 на 40 вовсе не нужны промежутки шкалы от 10 до 100 и от 100 до 1000, хотя 20 и 40 лежат в первом из них, а произведение их 800 — во втором. Основной промежуток от 1 до 10 позволяет найти их произведение, так как может представить любой другой промежуток шкалы, и, перемножая при его помощи 20 и 40, мы можем делать то же самое, что и при перемножении 2 на 4, но ответ считать, конечно, равным не 8, а 800, учитывая нули, которыми кончаются наши сомножители.

Итак, свойство периодичности позволяет заменить всю бесконечную шкалу одним её отрезком, например, от 1 до 10, и при его помощи производить всевозможные умножения.

Но, сделав такую замену, следует помнить, что теперь уже каждая цифра на шкале изображает не одно число, а все числа, получающиеся из него умножением на 10, 100, 0,001 (делением на 1000) и т. д., одним словом — умножением на любую степень десяти. И при умножении ответ будет обозначать то или иное из этих чисел в зависимости от того, каковы были сомножители.

Знакомые с теорией логарифмов без труда разберутся в том, почему шкала умножения периодична. Дело в том, что, например:

$$\log 0{,}2 = \log 2 - 1,$$
$$\log 20 = \log 2 + 1,$$
$$\log 200 = \log 2 + 2;$$

иначе говоря, мантиссы всех этих логарифмов равны; сами логарифмы отличаются друг от друга на целое число единиц.

Примеры умножения

§ 6. Пример 1. Перемножить 20·30.

На рис. 14 изображён отрезок шкалы для умножения. Цифра *2* теперь обозначает 20, а *3*—30. Как было выше показано, получаем

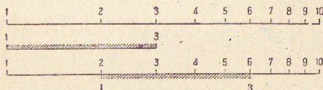


Рис. 14.

в качестве произведения цифру *6*, которая обозначает 600, так как каждый сомножитель оканчивается нулём и, следовательно, произведение их — двумя нулями.

Пример 2. Перемножить 2,3·20.

Для этого примера нужна шкала с более мелкими делениями. На рис. 15 каждый из первых пяти промежутков разделён ещё на

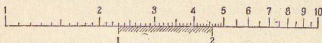


Рис. 15.

более мелкие деления, соответствующие цифрам следующего разряда. Имея такие деления, мы можем уже найти на шкале число 2,3 (соответствующий ему штрих будет обозначать и 2,3, и 230, и 23, и 0,023 и 0,00023, и т. д.) и получить обычным способом в качестве произведения число, первая цифра которого есть 4, а следующая 6.

Число это есть 46, так как один сомножитель оканчивается нулём, а второй имеет один знак после запятой.

Пример 3. Перемножить. 20·60.

Если мы попробуем найти в этом случае произведение таким же приёмом, как и в двух первых примерах, то окажется, что получить ответ не удаётся: он получается за пределами шкалы (рис. 16).

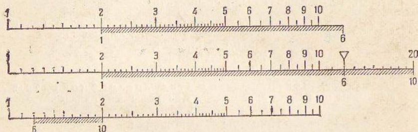


Рис. 16.

Чтобы разобраться, как в этом случае получить произведение, представим себе, что употребляемый нами отрезок шкалы от 1 до 10 нанесён на круге (мы можем наглядно представить себе это, вырезав шкалу из бумаги и свернув её в кольцо так, чтобы её начало и конец совпали); вторая шкала пусть будет также нанесена на кружок, который помещается внутри первого (рис. 17). Поворачивая один кружок относительно другого, мы можем производить умножение точно так же, как производили его на прямых шкалах, передвигая их друг относительно друга. Попробуем при помощи этих кружков сделать умножение 20·60; выгода кругового расположения шкалы по сравнению с прямолинейным та, что круговая шкала не кончается, и здесь невозможно положение, изображённое на черт. 16. Поставив против чёрточки *2* наружного кружка чёрточку *1* внутреннего, мы найдём ответ на наружном кружке против чёрточки *6* внутреннего; этот ответ равен 1200, так как первая его цифра должна быть *1*, вторая *2*, и, кроме того, два нуля на конце ввиду наличия этих нулей у каждого из сомножителей.

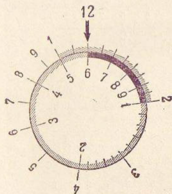


Рис. 17.

На кружке всё выходит прекрасно; но тот же результат можно получить и с прямыми шкалами: ведь штрих *12* имеется и на прямой шкале. Вопрос в том, как к нему притти. Умножая при помощи кружка, мы устанавливали начало внутреннего кружка

против *2* на наружном и затем против *6* внутреннего читали ответ; но с таким же успехом мы можем сказать, что против *2* был установлен к о н е ц внутреннего кружка (на кружке начало и конец совпадают), и вот это-то замечание и решает задачу. Результат можно получить, установив против *2* одной шкалы к о н е ц другой, и против *6* на ней прочесть на первой искомое число (рис. 18).

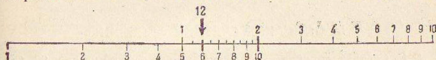


Рис. 18.

Этот способ умножения совершенно равноправен с тем, который был указан прежде, и применять его приходится так же часто.

3. Докажите, что одним из этих двух способов можно выполнить любое умножение.

Из сказанного следует, что, имея достаточно мелко разделённый отрезок логарифмической шкалы, мы всегда можем производить механически любые умножения.

Когда изобрели счётную линейку

§ 7. Свойства логарифмической шкалы были замечены вскоре после изобретения логарифмов — ещё в XVII в., и циркуль в соединении с логарифмической шкалой служил довольно удобным инструментом для умножения, пока не было придумано дальнейшее усовершенствование: устранить циркуль, з а м е н и в е г о в т о р о й ш к а л о й, с о в е р ш е н н о т о ж д е с т в е н н о й с п е р в о й. Усовершенствование это сделало излишним медленное и кропотливое откладывание циркулем нужных отрезков: всё дело свелось теперь к передвижению одной шкалы относительно другой (рис. 19). Уже в XVIII в. счётная линейка входит

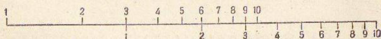


Рис. 19.

в расчётную практику. В XIX в. к линейке приделывают «бегунок», этим завершая её внешнюю эволюцию. С 1880—1890 гг. линейки становятся уже предметом крупного фабричного производства и начинают специализироваться по своему назначению: появляются линейки для электриков, механиков, экономистов и т. д.

II. ОПИСАНИЕ СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙКИ

§ 8. Счётная линейка изображена (не полностью) на рис. 20. Она состоит из трёх частей:

A — *линейка,*

B — *движок,*

C — *бегунок* (металлическая рамка со стеклом, на котором нанесена черта *l* — «метка», «визирная линия»).

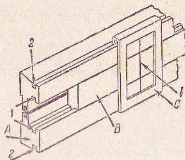


Рис. 20.

Если на бегунке три линии, нужно пользоваться средней. О боковых будет сказано позже.

Движок может ходить в пазах *1* линейки, вовсе выниматься и вставляться в перевёрнутом виде и задом наперёд. Бегунок ходит в пазах *2*. На передней стороне линейки и на передней и задней сторонах движка нанесены логарифмические шкалы (подробнее о них — ниже).

III. ПРАВИЛА ОБРАЩЕНИЯ СО СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

§ 9. Счётная линейка представляет собой инструмент достаточно деликатный. Поэтому, прежде чем ею пользоваться, необходимо усвоить правила обращения с нею:

1. *Нельзя держать линейку в горячем или во влажном месте. Около печки, парового отопления, на солнце линейка рассохнется и покоробится, сделавшись непригодной для работы. Во влажном месте она разбухнет так, что движок будет двигаться с трудом.*

2. *Нельзя оставлять линейку без футляра, когда на ней не работают. Положенная на стол или в портфель без футляра линейка легко царапается циркулями, перьями, перочинным ножом и тому подобными предметами; царапины остаются, грязнятся и мешают работе. По этой же причине нельзя употреблять её для черчения и как масштаб.*

3. *Нельзя ронять линейку со стола; она почти так же чувствительна к ударам, как циркули и рейсфедеры.*

4. *Если шкалы линейки загрязнятся, её нужно мыть винным спиртом (водкой), смочив в нём тряпочку и протирая шкалу, но не бензином, денатуратом, древесным спиртом или водой. Бензин растворяет краску, а денатурат и древесный спирт растворяют целлулоид; от воды разбухает дерево. Небольшую грязь можно стирать мягкой резинкой.*

5. *Если движок ходит туго, его можно вынуть и протереть его боковые рёбра воском или парафином, но ни в коем случае не подскабливать ножом или чем-либо ещё.*

6. *Слишком лёгкий или тугой ход бегунка исправляется осторожным подгибанием закраинок, которыми он держится на линейке.*

Правила 5 и 6 лучше всего выполнять после ознакомления с тем, как они выполняются человеком, опытным в обращении с линейкой.

IV. ШКАЛЫ ЛИНЕЙКИ; ЧТЕНИЕ И УСТАНОВКА ЧИСЕЛ

§ 10. *Все ошибки при работе на счётной линейке происходят от неверного чтения или неверной установки чисел на её шкалах. Поэтому хорошее знание шкал счётной линейки — первое условие для счётчика.*

● *Усвоив шкалы счётной линейки, вы овладели ею на* 50%.

Шкалы линейки

§ 11. На лицевой стороне счётной линейки имеется шесть шкал: ***K, A, B, C, D, L*** (рис. I, см. вклейку между стр. 14 и 15); из них ***K, A, D, L*** — на линейке, ***B*** и ***C*** — на движке. Основные шкалы — ***C*** и ***D*** [1]).

Шкалы ***C*** и ***D*** совершенно одинаковые. Они представляют собой отрезок логарифмической шкалы от 1 до 10, разделённый на мелкие деления с таким расчётом, чтобы на них можно было читать и устанавливать трёхзначные числа.

В соответствии с этим на шкалах ***C*** и ***D*** нужно различать деления трёх разрядов, определяющих первую, вторую и третью цифры числа. Так как при этом шкала неравномерна, то деления эти различны в разных местах шкалы.

Рассмотрите внимательно рис. II (см. вклейку между стр. 14 и 15). В его средней части изображена линейка со шкалами ***A, B, C, D*** посредине. В верхней и в нижней частях чертежа эти шкалы для ясности изображены в увеличенном виде; при этом деления разных разрядов изображены в разных местах. Шкалы ***C*** и ***D***, помещённые внизу, прежде всего разделены на крупные промежутки чёрточками с цифрами *1, 2, ..., 9.* Это — деления первого разряда, соответствующие первой цифре устанавливаемого или читаемого числа

---

[1]) Здесь и почти везде в дальнейшем описывается нормальная линейка системы «Ритц» со шкалами длиной 25 *см*, получившая наибольшее распространение («Прометей», Трест точной механики, ф-ка «Союз» и т. д.). На линейках последнего выпуска на движке, между шкалами ***B*** и ***C***, нанесена ещё одна — «обратная шкала», см. § 32.

Относительно маленьких линеек со шкалами длиной 12,5 *см* см. раздел XXIII (стр. 156).

(см. шкалу в нижней части чертежа, обозначенную слева римской цифрой I).

4. Найдите эти деления на линейке.

5. Если первая цифра числа *2*, то в каком промежутке оно будет находиться на шкале?

Каждый промежуток между делениями первого разряда разделён на 10 более мелких промежутков делениями второго разряда, соответствующими второй цифре нашего трёхзначного числа. На рис. II они изображены на шкале, отмеченной слева римской цифрой II. На самой линейке эти деления отмечены штрихами, немного выступающими за линию, идущую вдоль всей шкалы[1]). В первом промежутке (от *1* до *2*) они отмечены, кроме того, мелкими цифрами.

6. Найдите эти деления на линейке.

7. Обратите внимание на пятые деления во всех промежутках, начиная со второго (от *2* до *3* и т. д.).

Чем эти деления отличаются от остальных делений второго разряда?

8. Найдите на линейке промежуток, в который попадут числа, начинающиеся цифрами *1* и *4*; цифрами *3* и *6*.

В промежутках между делениями второго разряда нанесены деления третьего разряда, обозначающие третью цифру числа, но эти деления уже не равноценны во всех промежутках.

Причина этого такова: промежутки между делениями второго разряда идут сокращаясь, и если длина первого промежутка (в начале шкалы) равна 10,5 *мм*, то последний промежуток имеет длину, равную уже только 1 *мм*, и понятно, что делить их одинаково не годится: в первом можно сделать и 10 делений, а в последнем — только два.

Поэтому деления третьего разряда имеются на линейке трёх сортов; они указаны на рис. II.

Деления I сорта нанесены в промежутке между делениями первого разряда от *1* до *2* (рис. II); деления II сорта — в промежутках между делениями первого разряда от *2* до *3* и от *3* до *4*; деления III сорта — на всей остальной шкале.

Деления I сорта — самые удобные: они делят каждый промежуток между делениями второго разряда на десять частей и соответствуют третьей цифре числа.

Деления II сорта делят каждый промежуток между делениями второго разряда на пять частей; промежутки между ними

[1]) Или находящимися между двумя прямыми линиями, идущими вдоль всей шкалы.

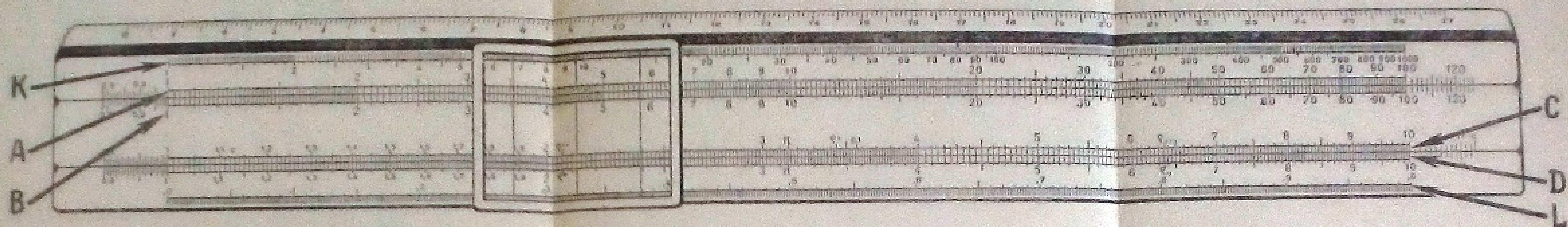
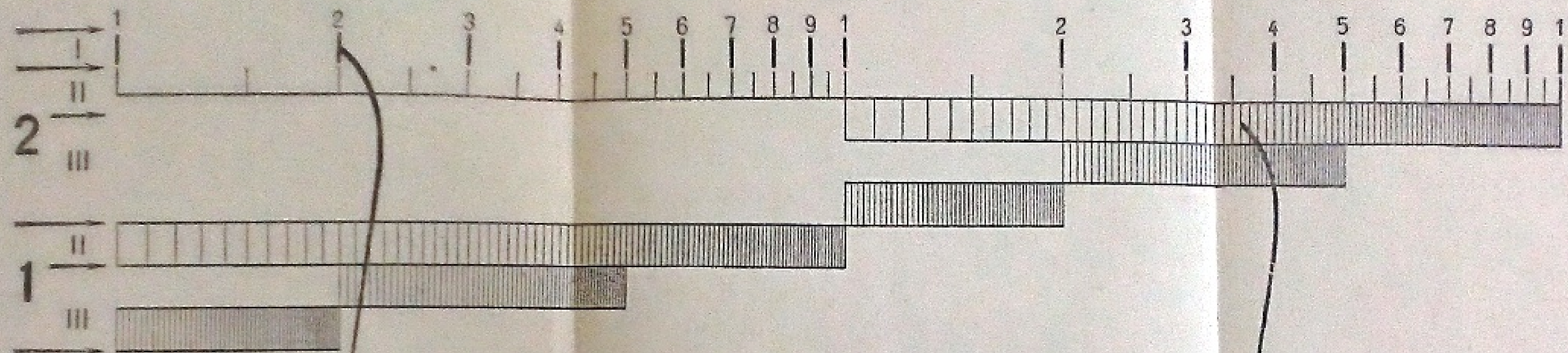
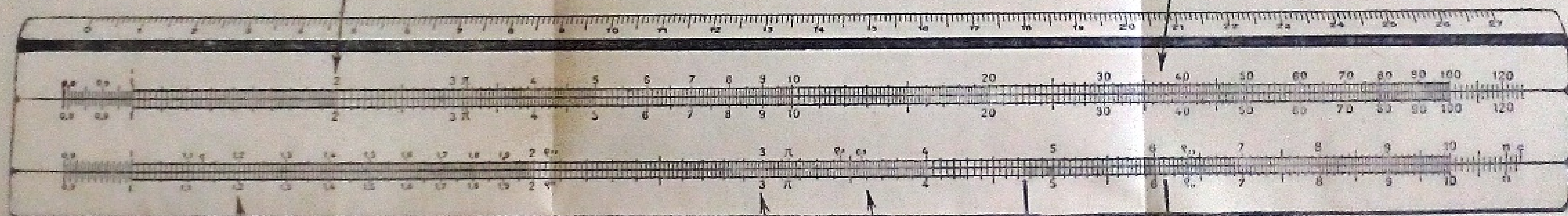


Рис. I



A–B



C–D

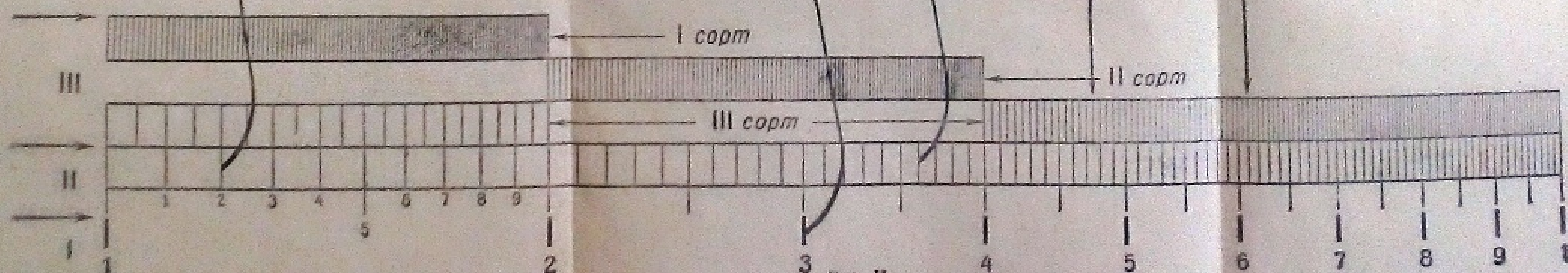


Рис. II

соответствуют, следовательно, двум единицам третьего разряда (эквивалентны двум делениям I сорта).

Деления III сорта соответствуют пяти единицам третьего разряда (каждое деление III сорта эквивалентно пяти делениям I сорта); они делят промежутки между делениями второго разряда только на две части.

Чтобы лучше разобраться во всех этих делениях, рассмотрите ещё рис. 21. На нем изображено, как выглядела бы шкала линейки, если бы она была равномерная.

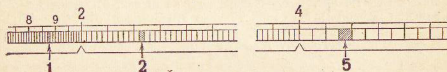


Рис. 21.

Наглядно показано, что деления II сорта вдвое больше делений I сорта, а деления III сорта — в пять раз больше их.

● *Усвоение «цены делений», иными словами, умение отвечать на вопрос, скольким единицам какого разряда эти деления отвечают, — основа счёта на линейке.*

● *На первых порах нужно обращать особое внимание на деления* II *сорта (деления между* 2 *и* 4*); с ними больше всего путаются начинающие, считая их соответствующими не двум единицам третьего разряда, а одной.*

9. Найдите все эти деления на линейке.

10. Обратите внимание на пятые деления в промежутках между делениями второго разряда, находящимися между *1* и *2*. Чем они замечательны?

● *Чтобы уверенно различать деления третьего разряда, нужно заметить, на сколько частей разделён промежуток между делениями второго разряда: на* 10, *на* 5 *или на* 2.

Чтение и установка чисел на линейке

§ 12. Задача 1. *Дано число; найти его место на шкале.*

Задача 2. *Указано место на шкале; каково соответствующее число?*

Решая первую задачу, мы *устанавливаем число на шкале линейки;* решая вторую, *читаем число на линейке.* Обе задачи очень просто решить, если знать шкалы.

Установка

§ 13. Мы уже знаем, что каждая цифра (или, вернее, чёрточка) на шкале обозначает не одно определённое число, а все числа, получающиеся из него умножением на любую степень 10. Число 0,0176 окажется на линейке в том же месте, что и 17,6,176 и 17600.

Поэтому нужно запомнить основное правило установки чисел.

Числа устанавливают на линейке, не обращая внимания на запятые и на нули на конце числа.

Устанавливая число, нужно читать просто его цифры в последовательном порядке и, найдя соответствующие им деления шкалы, определить его место.

Пример 1. Где на шкале число 17,1?

Читаем: один — семь — один. Устанавливаем: первый разряд — один, второй разряд — семь, третий — один (рис. 22).

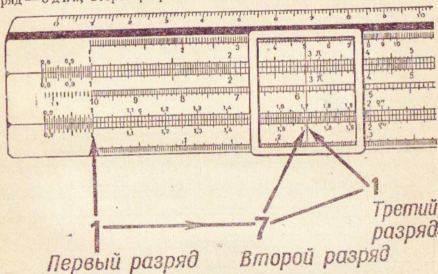


Рис. 22.

Пример 2. Установить число 2,12.

Два — один — два. Первый разряд — два, второй разряд — один, третий разряд — два (рис. 23).

В третьем разряде берём одно деление, так как оно соответствует как раз двум единицам третьего разряда.

Установить бегунок на числа: 1,36; 16,4; 6,45; 0,276; 895; 42,5; 3,92; 1,12.

12. Где устанавливаются 10,1 и 20,2? Начинающие считать на линейке делают это часто, как на рис. 24. Верно ли это?

13. Установите 3,64; 3,66 и 3,65.

14. Установить бегунком 2,35; 3,47; 329; 0,0223; 0,301; 1,345.

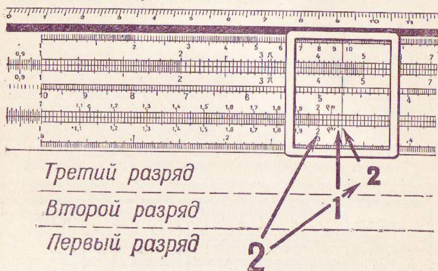


Рис. 23.

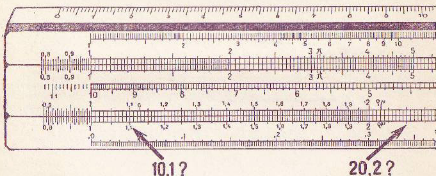


Рис. 24.

Решая вопросы, поставленные в заданиях **13** и **14**, мы уже видели, что для некоторых чисел делений не хватает и их приходится ставить на глаз — посредине между делениями.

Это и понятно: в промежутке от *2* до *4* деления идут ведь через две единицы, а после *4* — даже через пять единиц третьего разряда.

Пример 3. Установить 6,77 (рис. 25).
Шесть — семь — семь.
Первый разряд — шесть, второй — семь, третий — семь.

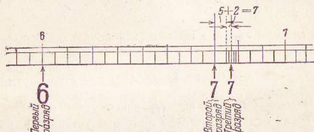


Рис. 25.

Но в третьем разряде у нас есть деление только для пяти, значит, нам нужно на глаз поставить бегунок после этого деления так, чтобы он отделял две пятые следующего промежутка $(7=5+2)$.

Такую установку на глаз приходится применять очень часто, поэтому практиковаться на этом следует побольше.

15. Разделите прямую на отрезки по 5 *мм* и затем на глаз отделите $^2/_5$ первого отрезка, $^4/_5$ второго, $^3/_5$ третьего, $^1/_5$ четвёртого. Проверьте деления на миллиметры, заметьте ошибки; повторите упражнение в другом порядке.

Эта задача предназначена для развития глазомера в той мере, в какой он нужен при работе на линейке. Упражнений такого рода можно придумать и выполнить самому сколько угодно. Следует, далее, попробовать делить на глаз отрезки более мелкие, чем 5 *мм*.

16. Установить бегунком 4,76; 327; 56,7; 0,0967; 7,08; 89,6; 66,6; 14,55; 16,67.

17. Установите 6,67 и 6,68. Теперь установите 6,675. Что проще? Заметьте этот случай простой установки. Установите ещё 53,25; 79,75.

Задача. Установить число 6,7789.

Мы уже видели, что, устанавливая число 6,77; нам пришлось последнюю цифру брать на глаз; ясно, что то же пришлось бы делать и с дальнейшими цифрами. Но это физически невозможно: никто не сумеет верно отделить на глаз $\frac{289}{500}$ какого-нибудь отрезка. Поэтому, когда нам попадаются такие числа, мы их округляем, ставя вместо 6,7789 просто 6,78 и сохраняя лишь те три цифры, которые можно поставить и прочесть на линейке.

На линейке можно производить вычисления с тремя, самое большее — с четырьмя знаками.

(Четыре знака можно брать для чисел, начинающихся с 1, а при навыке — и с 2.)

18. На счётной линейке вычисляется объём бака высотой около 4 *м* и диаметром около 2,5 *м*. Чертёжник дал высоту и диаметр с точностью до миллиметра. Целесообразно это или нет?

Указание. Если размер около 4 *м* дан с точностью до миллиметра, то это значит, что в числе, начинающемся с 4, дан четвёртый знак (1 *мм*=0,001 *м*; значит, даны: один знак до запятой и три знака после запятой). Можно ли точно установить на линейке, например, такое число, как 4,126? Исследовать таким же образом, целесообразно ли аналогичное задание диаметра. Дать теперь точную мотивировку решения задачи **18**.

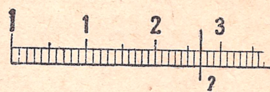
Чтение чисел на шкале

§ 14. Пример. Какое число установлено на чертеже 26?

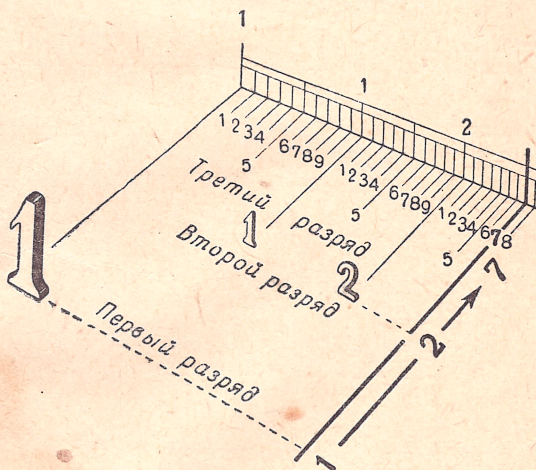
Ближайшее меньшее деление первого разряда — один, второго разряда — два, третьего разряда — семь.

Ответ: один — два — семь (черт. 27).

Это может быть и 127, и 0,0127, и 1,27 и т. д.



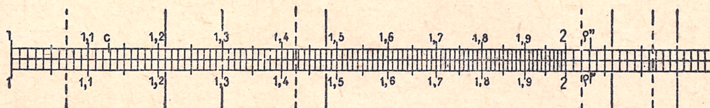
Черт. 26



Черт. 27

Устанавливая числа на линейке, мы не обращаем внимания на запятые и нули на конце. Естественно, что, читая число, мы ничего не можем сказать о месте запятой или числе нулей; прочесть число — означает: прочесть его цифры в последовательном порядке; вопрос же о месте запятой решается особо.

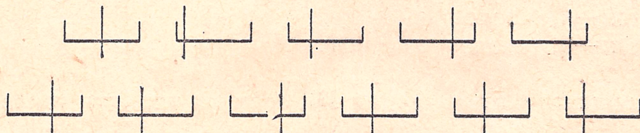
19. Прочесть числа: сначала отмеченные на черт. 28 сплошными чёрточками, потом — пунктирными.



Черт. 28

Понятно, что при чтении также приходится читать деления на-глаз. На этом тоже надо напрактиковаться.

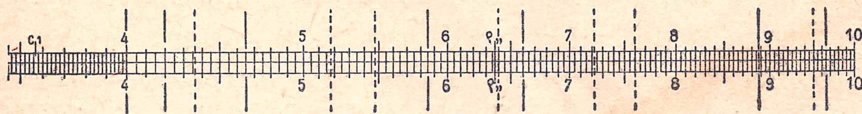
20. Определите на-глаз, сколько десятых долей всего отрезка заключено между его началом (левым концом) и вертикальной чертой (черт. 29).



Черт. 29

Проверьте ответы, измерив, сколько миллиметров между началом и штрихом. Отрезки взяты по 10 *мм*.

Эту задачу можно видоизменить таким образом: отметить на прямой отрезки по 10 *мм* и расставить в них чёрточки как попало; затем определить, сколько десятых всего отрезка пришлось до чёрточки. Ответы проверить по масштабу.



Черт. 30

21. Прочесть числа: сначала отмеченные на черт. 30 сплошными чёрточками, потом — пунктирными.

Во всех этих заданиях числа читались просто в порядке их цифр: о д и н — д в а — с е м ь и т. д. Чтобы вполне знать число, указывают ещё его «порядок». Порядком называют число, определяемое так:

Для чисел $\geqslant 1$ «порядком» числа называют число его цифр до запятой.

Для чисел < 1 «порядок» числа — число нулей после запятой до первой значащей цифры, притом взятое со знаком минус.

Порядок, следовательно, считают положительным для чисел $\geqslant 1$ и отрицательным для чисел < 1.

Пример.

128 000	— порядок	$= +6$	0,267	— порядок	$= 0$
6 402,01 —	»	$= +4$	0,0672 —	»	$= -1$
27,25 —	»	$= +2$	0,000301 —	»	$= -3$
1,6 —	»	$= +1$			

22. Указать порядок чисел:

2,46; 36,2; 0,07; 0,4001; 200; 4,01; 0,003; 20,00.

Если известны цифры числа в той последовательности, какую они в нём имеют, и указан порядок числа, то число это вполне определено.

Пример. Цифры числа: один — два — семь. Порядок: $+2$, тогда число: 12,7.

Порядок: $+4$, число: 1270.

Порядок: -3, число: 0,000127.

23. Написать числа задания **19**, если их порядки таковы:

сплошных: $+1,\ -2,\ 0,\ +2,\ -1,\ 0,$
пунктирных: $+3,\ -1,\ -3,\ 0.$

Итак,

чтобы полностью прочесть число на линейке, нужно:

1) *знать его место на шкале,*
2) *знать его порядок.*

Нужно иметь в виду, что чтение чисел обычно отнимает у начинающих больше всего времени, составляя наиболее утомительную часть работы; поэтому напрактиковаться в этом нужно получше.

● *Излишне вглядываться в линейку пристально, на ней ничего нельзя заметить, кроме того, что видно уже при беглом взгляде. Результат нужно читать быстро, делая оценку на глаз без примерок и колебаний; вначале это, может быть, будет идти в ущерб точности, зато позволит работать с линейкой не утомляя глаз.*

V. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Умножение

§ 15. Пример 1. Перемножить 2·3.

Передвигаем движок вправо так, чтобы *1* на движке пришлось против *2* на линейке (рис. 31), и против *3* на движке читаем на линейке ответ.

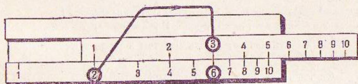


Рис. 31.

24. Проделайте этот же пример на линейке. Затем перемножьте

2,12·3,16.

25. Перемножьте 5,45·3,12, имея в виду пример 3 на стр. 15.

● *Обратите внимание на этот пример и заметьте, что при умножении мы воспользовались не начальным, а конечным штрихом движка; делать так нам придётся часто.*

Когда надо перемножить числа вроде 1,2·3,5, то, читая на линейке ответ: четыре — два, нам не придет в голову считать, что это может быть 42; 420; 0,42 и т. д. Ясно, что 1,2·3,5 = 4,2, но такой расчёт, основанный на приблизительном представлении о величине произведения, не всегда удобен. Поэтому вот правило, дающее порядок произведения в зависимости от порядка сомножителей.

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

> Если при перемножении двух чисел движок выдвигается вправо (т. е. перемножение производится при помощи начального штриха движка), то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей минус единица.
>
> Если движок выдвигается влево (т. е. перемножение производится при помощи конечного штриха движка), то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

Основано это правило вот на чём: порядок всегда на единицу больше характеристики логарифма. Пусть порядок числа a есть p_a, а порядок числа b есть p_b. Если $\log a = n_a + m_a$, а $\log b = n_b + m_b$, где n_a и n_b — характеристики, а m_a и m_b — мантиссы, то

$$n_a = p_a - 1, \quad n_b = p_b - 1.$$

Составим

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b = (n_a + n_b) + (m_a + m_b).$$

Здесь возможны два случая:

$$1)\ m_a + m_b < 1,$$
$$2)\ m_a + m_b \geqslant 1.$$

В первом случае характеристика логарифма $a \cdot b$ равна $n_a + n_b$, во втором же равна $n_a + n_b + 1$, т. е. в первом случае порядок $(a \cdot b)$ равен:

$$1)\ p_{ab} = n_a + n_b + 1,$$

во втором:

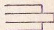
$$2)\ p_{ab} = n_a + n_b + 2,$$

т. е.

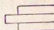
$$1)\ p_{ab} = p_a - 1 + p_b - 1 + 1 = p_a + p_b - 1,$$
$$2)\ p_{ab} = p_a - 1 + p_b - 1 + 2 = p_a + p_b.$$

На линейке же эти два случая как раз тем и различаются, что при

$m_a + m_b < 1$ движок идёт вправо;



а при $m_a + m_b \geqslant 1$ движок идёт влево:



26. Перемножить: 5,25·0,8; 0,015·3,5; 35·2,4; 2,96·7,5.
27. Перемножить 1,54·3,26; 2,18·4,65; 0,095·17,8; 6,55·2,42.

● *При умножении нужно стараться ставить точно движок, — это улучшит результат.*

● *Хотя правило о порядке во многих случаях и удобно, всё же злоупотреблять им не следует. Применение этого правила* ***замедляет расчёт.*** *Поэтому необходимо приучать себя обходиться без него, применять его только в крайних случаях. В большинстве практических расчётов это облегчается самим существом дела. При определении, например, средней скорости поезда на перегоне, получив цифры пять — два, легко догадаться, что это будет не 520 км/час и не 5,2 км/час, а 52 км/час.*

Пример 2. Перемножить 1,2·3,6·2,5. Здесь нужно выполнить два умножения (1,2·3,6 и результат на 2,5), но результат одного из них не нужен. Чтобы не читать его зря, нужно поступить так: выдвинув движок на *1,2*, поставить бегунок на *3,6* (рис. 32); затем, не трогая бегунка, передвинуть движок для следующего умножения, поставив его конечную черту против визирной линии бегунка. Против *2,5* — окончательный ответ: один — нуль — восемь.

Порядок, очевидно, равен сумме порядков сомножителей **минус столько единиц, сколько раз движок выходил направо**: 1+1+1=3; 3—1=2. Следовательно, ответ: 10,8.

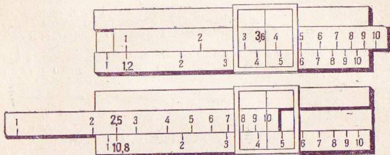


Рис. 32.

28. Перемножить, не читая промежуточных результатов: 2,65·1,32·0,75; 4,65·0,0785·0,196·2,48; 2,94·3,66·0,65.

29. Вычислите вес сосновой доски длиной 4,75 *м*, толщиной 6,5 *см*, шириной 45 *см*. Удельный вес сосны 0,56.

30. Сколько нужно асфальта на покрытие двора 48 × 137 *м*² слоем толщиной в 1,2 *см*? Удельный вес асфальта 1,10.

● *Приближённо ответы нужно прикидывать в уме. Это лишний раз гарантирует от ошибки.*

Деление

§ 16. Пример 1. Разделить 6:3.

Поставим против *6* на линейке *3* — на движке. Тогда против единицы движка на линейке прочитаем частное (рис. 33).

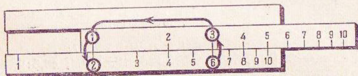


Рис. 33.

31. На каком свойстве логарифмов основано такое выполнение деления?

32. Разделить на линейке 6,8:5; 36:2,5.

33. Как разделить на линейке 20 на 5? Где получится частное и против какого штриха движка?

34. Разделить 147:3,5; 3,2:6,4.

Аналогично правилу о порядке произведения иногда бывает полезно

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ ЧАСТНОГО

> Если при делении движок выходит направо (т. е. частное получается при помощи начального штриха движка), то порядок частного равен разности порядков делимого и делителя плюс единица.
>
> Если движок выходит налево (т. е. частное получается при помощи конечного штриха движка), то порядок частного равен разности порядков делимого и делителя.

Пример 2. Разделить 2,08:0,13. Сделав это на линейке, мы видим, что движок выдвинулся вправо. Прочитанное число один — шесть, порядок делимого 1, делителя 0. Следовательно, порядок частного $1-0+1=2$. Ответ: 16.

Из этого правила, однако, есть одно исключение. Пусть нам надо разделить 1 на 5. Мы можем это сделать двумя способами:

1) Поставить 5 на шкале *C* над левой единицей шкалы *D* и прочесть на шкале *D* ответ. Движок здесь вышел налево, порядок частного по правилу равен $1-1=0$, $1:5=0{,}2$.

2) Поставить 5 на шкале *C* над правой единицей шкалы *D*. Тогда начало движка укажет на шкале *D* ответ. Это будет то же число 2, но порядок, если применять правило, равен $1-1+1=1$, т. е. выходит, что

$$1:5=2.$$

Таким образом, правило о порядке частного годится во всех случаях, кроме одного:

> *Нельзя пользоваться правилом о порядке частного, если выполняется деление $1:a$ при движке, выдвинутом вправо.*

Чтобы избежать этого исключения, мы условимся всегда производить деление $1:a$, выдвигая движок влево.

Причина этого исключения ясна: рассмотренный случай деления есть единственный случай деления, который может быть выполнен при обоих положениях движка. Так как для каждого из этих положений порядок частного подсчитывается по-своему, то ясно, что в одном из случаев правило окажется неверным.

35. Разделить 5,25:32; 11,3:1,7; 0,19:0,48; 87:2,7.

36. Разделить 6,15:2,46; 9,85:0,148; 19,6:1,04; 43,5:2,74.

37. Сдельная плата за изготовление детали — 3 р. 55 к., время, потребное на изготовление её, — 9,5 часа. Какова почасовая плата?

Комбинированное умножение и деление

§ 17. Пример 1. Вычислить $\frac{3 \cdot 5}{2}$. Здесь мы опять, как и в примере 2 (стр. 28) с тремя сомножителями, имеем дело с двумя действиями, причём результат первого из них не нужен, важен только конечный результат.

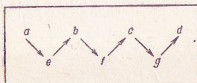
Ставим *2* против *3* (рис. 34), как это нужно для деления, но затем не читаем ответа против *1*, а сразу умножаем его на *5*, т. е. просто читаем ответ против *5*, так как *1* уже стоит против нужного места.



Рис. 34.

Пример 2. Вычислите $\frac{3 \cdot 5 \cdot 10,5}{2 \cdot 23}$. Вычислим опять, как только что было указано, выражение $\frac{3 \cdot 5}{2}$, но теперь уже не читаем его, а отметим бегунком. Затем, не трогая бегунка, передвинем движок так, чтобы *23* пришлось против визирной линии (деление на 23), и читаем ответ против *10,5* (умножение на 10,5).

Итак, выражения вида $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ вычисляются по схеме:



38. Вычислите $\frac{3,6 \cdot 4,25 \cdot 8,5}{9,75 \cdot 6,42}$; $\frac{4,05 \cdot 2,66 \cdot 1,34 \cdot 0,96}{6,63 \cdot 12,45 \cdot 8,55}$.

Пример 3. Вычислить $\frac{8,75 \cdot 4,65}{3,22}$.

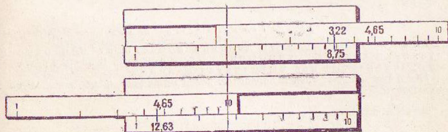


Рис. 35.

Вычисляя по обычному способу, мы видим, что после выполнения деления прямо прочесть ответ против *465* нельзя, — он выходит за шкалу (рис. 35). Тогда нужно поставить

бегунок на начальный штрих движка и затем, не трогая бегунка, передвинуть движок так, чтобы на место его начального штриха стал конечный. Тогда можно прочитать ответ против *465*. Точно так же может встретиться случай, когда вместо конечного штриха движка нужно будет поставить начальный. Эту операцию можно назвать «переброской» движка.

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ УМНОЖЕНИИ И ДЕЛЕНИИ

> Порядок дроби $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ равен разности между суммой порядков сомножителей в числителе и суммой порядков сомножителей в знаменателе плюс столько единиц, сколько было перебросок конечного штриха на место начального, и минус столько единиц, сколько было перебросок начального штриха на место конечного.

Чтобы доказать это правило, достаточно разобрать случай дроби $\frac{a \cdot b}{c}$.

Порядок

a	p_a
b	p_b
c	p_c

1. Результат читается без переброски. Тогда и деление и умножение происходят при одной и той же установке движка. Если движок выдвинут влево, то порядок

$$\frac{a}{c} = p_a - p_c,$$

а порядок

$$\frac{a \cdot b}{c} = p_a - p_c + p_b,$$

если — вправо, то порядок

$$\frac{a}{c} = p_a - p_c + 1,$$

а порядок

$$\frac{a \cdot b}{c} = (p_a - p_c + p_b + 1) - 1 = p_a - p_c + p_b.$$

2. Если нужна переброска, то деление происходит при одной установке движка, а умножение — при другой. В порядке результата прибавляется или вычитается единица.

Разберите второй случай подробнее: когда единица прибавляется, когда вычитается?

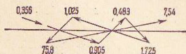
39. Вычислить $\frac{4,75 \cdot 6,25 \cdot 0,52 \cdot 22,1}{14,05 \cdot 3,76 \cdot 8,24}$; $\frac{9,65 \cdot 2,17 \cdot 0,0047}{32,6 \cdot 18,85}$.

Удобным подбором порядка перемножений нужно стараться избегать перебросок движка.

Например,

$$\frac{0,356 \cdot 1,025 \cdot 0,483 \cdot 7,54}{75,8 \cdot 0,905 \cdot 1,725}$$

требует перебросок движка, но если выполнить действие так:



то перебросок не требуется.

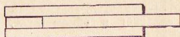
● *Правило о порядке следует применять лишь тогда, когда в знаменателе на один множитель меньше, чем в числителе. В остальных случаях порядок нужно подсчитывать после каждого действия.*

● *Больше всего утомляет и отнимает времени при работе на линейке чтение чисел. Поэтому каждое непрочитанное промежуточное произведение или частное в комбинированных действиях представляет собой большой выигрыш. Нужно стараться поэтому как можно меньше читать на линейке, всюду, где только возможно, заменяя чтение установкой бегунка. Кроме выигрыша во времени это даст еще и увеличение точности, так как при всяком прочтении и последующей установке вкрадывается погрешность; установка же бегунка может быть выполнена почти совершенно точно.*

● *Не забывайте о том, что грубая прикидка ответа в уме оберегает от ошибок.*

● *Следует помнить также правила о порядке произведения и частного:*

Если движок — вправо,
то { *произведение* — 1
частное + 1



По-французски: PRODUIT | P — 1
QUOTIENT | Q + 1

Эти значки имеются и на самих линейках.

VI. ПРОПОРЦИИ

§ 18. Для того чтобы твердо усвоить порядок выполнения умножения и деления, можно воспользоваться тем обстоятельством, что при данном положении движка отношение стоящих друг против друга чисел на шкалах ***C*** и ***D*** является постоянным, в каком бы месте шкалы мы эти числа ни читали (рис. III, см. вклейку между стр. 34 и 35).

Если, например, движок стоит так, как на рис. III, то числа *2* и *16*, *3* и *24*, *4,5* и *36*, *6* и *48* и т. д. стоят друг против друга; и действительно:

$$\frac{1,25}{10}=\frac{2}{16}=\frac{3}{24}=\frac{4,5}{36}=\frac{6}{48}=\frac{1}{8}.$$

Это свойство очень легко запомнить, если считать прорез между движком и линейкой за дробную черту. Тогда каждую пару стоящих друг против друга чисел на шкалах ***C*** и ***D*** можно считать «дробью», и все эти дроби будут друг другу равны. Это правило, разумеется, нисколько не противоречит правилам умножения и деления: в самом деле, при перемножении чисел a и b поступают, как на рис. 36, и очевидно, что

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{a\cdot b}.$$



Рис. 36.

Аналогично, деля a на b, движок ставят, как на рис. 37, что согласуется и с новым правилом:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}.$$

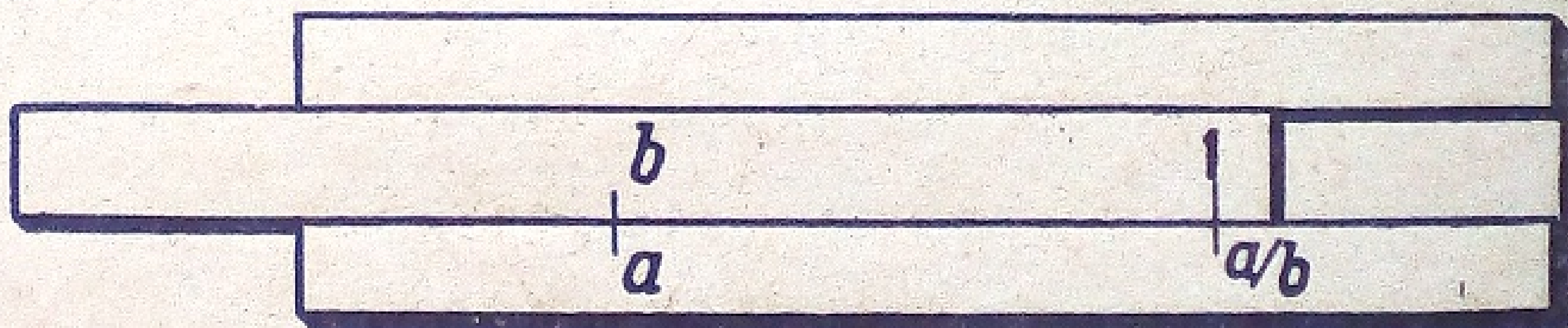


Рис. 37.

Все задачи, приводящиеся к пропорциям, решаются на линейке очень просто при одной установке движка.

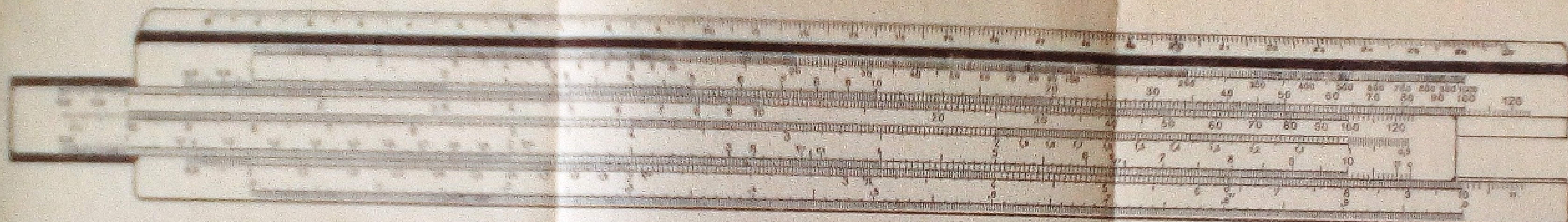


Рис. III

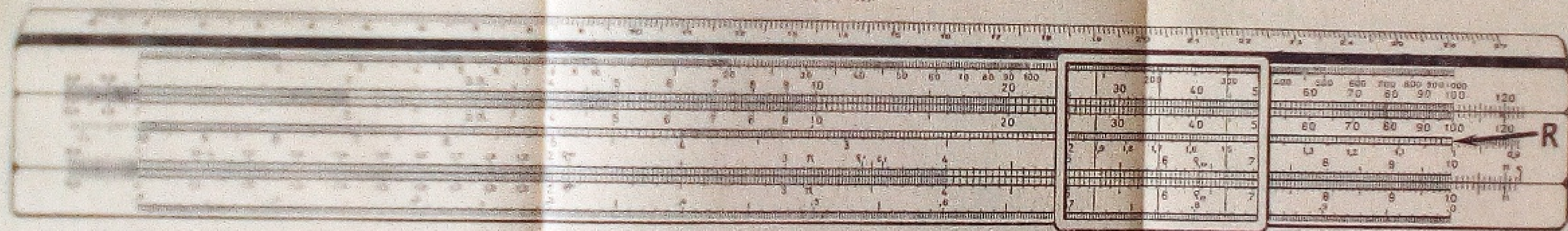


Рис. IV

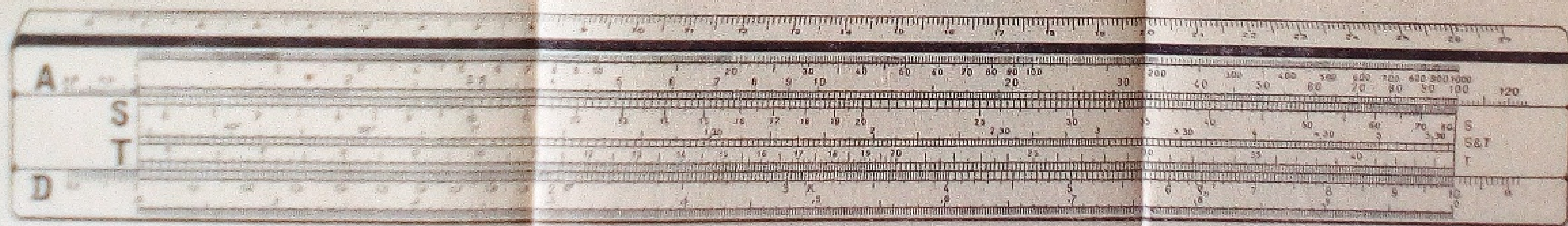


Рис. V

Пример 1. Найти x, y, z, v из уравнений:

$$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{48}=\frac{1}{v}=0,125.$$

Здесь можно рассматривать 0,125 как дробь $\left(\frac{0,125}{1}\right)$; установив 0,125 шкалы C над единицей (началом) шкалы D, мы, согласно сказанному выше, будем получать равные дроби, беря их числители на шкале C (там же, где было взято 0,125), а знаменатели — на шкале D (где взята единица). Так как против 16 шкалы D на шкале C стоит 2, то $x=2$; аналогично $y=3$, $z=6$; v нужно искать на шкале D против единицы шкалы C; $v=8$ (рис. III).

40. Найти x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\frac{1}{1,32}=\frac{x_1}{2,61}=\frac{x_2}{3,05}=\frac{x_3}{5,75}=\frac{x_4}{10,00}.$$

41. Найти α_1, α_2, α_3 из уравнений:

$$\frac{1,69}{\alpha_1}=\frac{4,46}{\alpha_2}=\frac{6,25}{\alpha_3}=7,70.$$

При вычислениях с пропорциями можно пользоваться таким правилом о порядке:

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ В ПРОПОРЦИЯХ

> Для каждой пары чисел x и y, стоящих друг против друга на шкалах C и D и образующих равные отношения (равные «дроби»), разность порядков первого и второго числа (числителя и знаменателя «дроби»), при одном и том же положении движка, одна и та же.

Доказать это очень просто. Пусть порядки чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ будут $p_1, p_2, \ldots, p_k$, а порядки чисел $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — соответственно $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Тогда из того, что

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_k}{y_k},$$

следует, что и порядки этих дробей должны быть равны, т. е. или

$$p_1-q_1+1=p_2-q_2+1=\ldots=p_k-q_k+1,$$

или

$$p_1-q_1=p_2-q_2=\ldots=p_k-q_k.$$

В обоих случаях правило доказано.

Применять это правило особенно удобно тогда, когда все числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (или $y_1, y_2, \ldots, y_k$) — одного и того же порядка. Тогда из этого правила следует, что и все числа $y_1, y_2, \ldots, y_k$ (или $x_1, x_2, \ldots, x_k$) — тоже одного и того же порядка, и думать о порядке вообще не приходится, — всё ясно и так.

● *Применяя это правило, мы должны помнить, однако, об исключений, указанном на стр. 30. Если в наших пропорциях попалось отношение* $\frac{a}{1}$, *причем единица в знаменателе — правая единица шкалы D, то для этой пропорции порядок должен быть* ***подсчитан особо;*** *в этом случае нельзя считать верным правило: «если порядки знаменателей равны, то и порядки числителей равны».*

● *Это правило нельзя применять также в тех случаях, когда требуется* ***переброска движка.*** *Разберитесь в этом подробнее сами.*

Пример 2. В задании **40** первые 4 отношения подчиняются правилу: из равенства порядков знаменателей следует равенство порядков числителей; порядок всех числителей — единица, как в первом отношении. Но если присоединить последнее отношение, то правило нарушается: в знаменателе порядок 2, а в числителе остается по-прежнему 1.

Пример 3.

$$\frac{x_1}{5{,}7}=\frac{x_2}{3{,}65}=\frac{x_3}{0{,}024}=\frac{x_4}{165{,}5}=\frac{1}{2{,}6}.$$

Здесь порядки знаменателей разные; значит, порядки x тоже разные. Разность порядков для дроби $\frac{1}{2{,}6}$ равна нулю; значит, та же величина должна получаться и для остальных дробей, получаемых без переброски движка. Поэтому порядок $x_1=1$, порядок $x_2=1$. Для того, чтобы найти x_3 и x_4, движок надо перебросить. Правило уже не применимо и мы получим порядок $x_3=-2$, порядок $x_4=+3$.

42. Найти x_1, x_2, x_3, x_4 из условия:

$$\frac{x_1}{14{,}6}=\frac{x_2}{0{,}162}=\frac{x_3}{1{,}895}=\frac{x_4}{202{,}0}=\frac{35{,}6}{29{,}7}.$$

43. Найти s_1, s_2, s_3, s_4 из уравнений:

$$\frac{3{,}41}{0{,}29}=\frac{4{,}95}{s_1}=\frac{0{,}58}{s_2}=\frac{0{,}0091}{s_3}=\frac{100}{s_4}.$$

44. Определить a, b, M, N, если

$$\frac{15}{192}=\frac{a}{1950}=\frac{b}{251}=\frac{3}{M}=\frac{491}{N}.$$

VII. КВАДРАТЫ И КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 19. 45. Поставьте визирную линию бегунка на деление *2* нижней шкалы (шкалы ***D***) и прочтите число, которое эта линия отметит на шкале ***A***.

Поставьте визирную линию на *3* и прочтите соответствующее число на шкале ***A***. Как связаны с *2* и *3* прочитанные числа?

Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня на линейке делаются моментально: шкала ***A*** (а также шкала ***B***, в точности совпадающая со шкалой ***A***) разделена так, что каждому числу на шкале ***D*** соответствует его квадрат на шкале ***A***. Поэтому, чтобы научиться возводить в квадрат и извлекать квадратные корни, нужно лишь ознакомиться со шкалой ***A***.

На шкале ***A*** деления нанесены в масштабе, в два раза более мелком, чем на шкале ***D***. Так как деления шкалы ***D*** пропорциональны $\log n$, то деления шкалы ***A*** пропорциональны $2 \log n = \log n^2$.

Шкалы *A* и *B*

Вся шкала ***A*** состоит из двух половин: первая содержит деления от 1 до 10; вторая половина — от 10 до 100 — в точности повторяет первую. Поэтому достаточно разобрать лишь первую половину.

46. Рассмотрите внимательно первую половину шкалы ***A*** и найдите деления первого, второго и третьего разрядов. Проверьте по рис. II (вклейка между стр. 14 и 15).

47. Скольким единицам третьего разряда соответствует каждое деление третьего разряда в промежутке от 1 до 2? В промежутке от 2 до 5? Имеются ли деления третьего разряда в промежутке от 5 до 10?

48. Рассмотрите вторую половину шкалы. Сверьте соответствующие промежутки обеих половин и убедитесь, что они равны и совершенно одинаково разделены.

Эта тождественность обеих половин — прямое следствие второго основного свойства логарифмической шкалы: числа правой половины в 10 раз больше чисел левой.

● *На некоторых линейках в правой половине стоят и числа, в точности такие же, как и в левой: вместо 20 стоит 2, вместо*

30—3 и т. д. По сути дела — это одно и то же, так как при установке число ставят просто как ряд цифр: два, пять, три вместо: двадцать пять и три (25,3).

Любое число можно ставить и в правой и в левой половине шкалы. Тем не менее, различие между этими половинами весьма существенно при возведении в квадрат и извлечении корня, как это в дальнейшем будет видно при определении порядка результата.

49. Поставьте в левой половине шкалы числа 167, 248, 356, 645, 895, 564; в правой половине числа 19,2; 2650; 97,5.

При выполнении задания **49** видно, что при установке чисел на шкале ***A*** приходится брать на глаз гораздо больше, чем на шкале ***D***. Это и понятно: деления здесь грубее, так как при более мелком масштабе приходится чересчур мелкие деления выбрасывать. Из-за этого результаты действий, производимых на шкалах ***A*** и ***B***, менее точны, чем на шкалах ***C*** и ***D***.

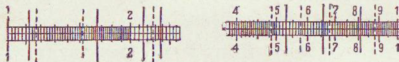


Рис. 38.

50. Прочитайте числа, сначала отмеченные на рис. 38 сплошными чертами, потом — пунктирными (на этом чертеже изображены кусочки шкал ***A*** и ***B***).

Возведение в квадрат

Как уже видно из сказанного, самое возведение в квадрат — дело в высшей степени простое: всё сводится только к установке визирной

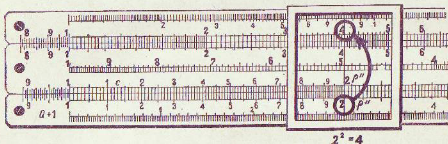


Рис. 39.

линии на число на шкале ***D*** и к чтению результата на шкале ***A*** (рис. 39); единственная трудность, и то небольшая, — в определении порядка результата.

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ КВАДРАТА

Если ответ (квадрат числа) находится в правой половине шкалы *А*, то порядок квадрата равен удвоенному порядку числа, возводимого в квадрат. Если в левой,— то удвоенному порядку минус единица.

Пример. Найти квадрат $0{,}002^2$. Бегунок ставится на *2* (рис. 39). Ответ: четыре — в левой половине.

Порядок возвышаемого числа — 2. Порядок квадрата: $(-2)\cdot 2 - 1 = -5$. Следовательно: $0{,}002^2 = 0{,}000004$.

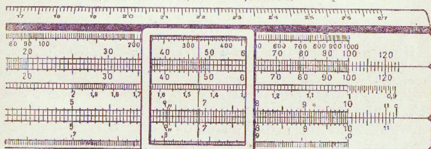


Рис. 40.

Пример. Найти $6{,}88^2$. См. рис. 40.

Ответ: четыре — семь — три.

Порядок числа, возводимого в квадрат: $+1$.

Порядок квадрата: $(+1)\cdot 2 = +2$.

$$6{,}88^2 = 47{,}3.$$

51. Докажите правило о порядке квадрата, исходя из правила о порядке произведения.

Указание. Нужно перемножить число само на себя на шкалах *C* и *D* и заметить, в какую половину шкалы *А* попадет квадрат (равный этому произведению) в том случае, когда движок выйдет вправо, и когда — влево.

52. Найти квадраты: $2{,}36^2$; $0{,}495^2$; $79{,}5^2$; $1{,}165^2$; $0{,}105^2$; $0{,}968^2$; $3{,}37^2$; $0{,}00692^2$.

Извлечение корня

Если числа *А* — квадраты соответствующих чисел шкалы *D*, то, обратно: числа шкалы *D* суть квадратные корни соответствующих чисел *А*.

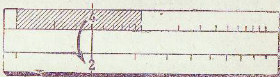


Рис. 41.

Пример 1. Найти $\sqrt{4}$. Поставьте бегунок на чёрточку *4* шкалы *А* и прочтите ответ на шкале *D* (рис. 41).

Пример 2. Найти $\sqrt{40}$. Теперь бегунок надо поставить на *40* в правой половине шкалы *А* (или на *4*, если на линейке в правой половине шкалы *А* стоят те же числа, что и в левой половине) и ответ получится: 6,32 (рис. 42).

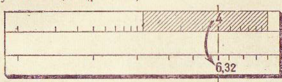


Рис. 42.

В первом примере мы ставили бегунок на *4* в левой половине, во втором примере — в правой половине и поэтому получили разные ответы.

Для того чтобы решить, когда же нужно ставить числа в левой половине шкалы *А* и когда — в правой, нужно знать

ПРАВИЛО ИЗВЛЕЧЕНИЯ КОРНЯ

> 1) Разделите число на грани, то-есть на группы по две цифры, влево от запятой, если число $\geqslant 1$, и вправо от запятой, если оно < 1.
>
> 2) Посмотрите, сколько цифр — одна или две — в крайней левой грани, если число $\geqslant 1$, или в той, которая идет за сплошь нулевыми гранями, если число < 1.
>
> 3) Если таких цифр только одна, то устанавливайте число в левой половине шкалы *А*, если две, то в правой.
>
> 4) Порядок корня равен числу всех граней (включая и неполные), если подкоренное число $\geqslant 1$, и числу чисто нулевых граней, если оно < 1, взятому со знаком минус (при этом «нуль целых» за грань не считается).

● *Сравните это правило с правилом извлечения корня в алгебре и обратите внимание на совпадение способов определения числа цифр в корне.*

Пример 3. Найти $\sqrt{300}$ и $\sqrt{0{,}000003}$.

1) $\overset{2\;1}{3'00}$ — две грани.	1) $0{,}\overset{1}{00}'\overset{2}{00}'03$ — две чисто нулевые грани.
2) Во второй грани — одна цифра.	2) В грани, следующей за чисто нулевыми, — одна цифра.
3) Так как цифра одна, устанавливаем число в левой половине (рис. 43).	3) То же: так как цифра одна, устанавливаем число в левой половине.

Прочитанное число: один — семь — три — два.

4) Так как граней две, то порядок корня: +2.	4) Так как граней две, то порядок корня: —2.
Ответ: $\sqrt{300} = 17{,}32$;	$\sqrt{0{,}000003} = 0{,}001732$.

Пример 4. Найти $\sqrt{5000}$ и $\sqrt{0,0000005}$.

1) $\overset{2}{50}'\overset{1}{00}$ — две грани.

2) В крайней грани — две цифры.

1) $0,\overset{1}{00}'\overset{2}{00}'\overset{3}{00}'50$ — три чисто нулевые грани.

2) В следующей за нулевыми гранями — две цифры.

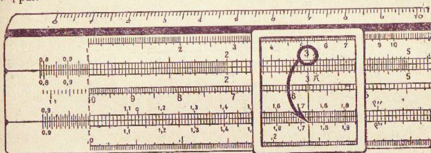


Рис. 43.

3) Так как цифр две, ставим число в правой половине (рис. 44).

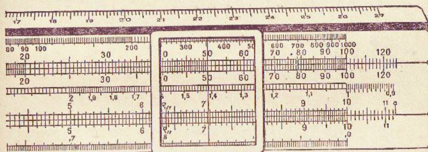


Рис. 44.

Прочитанное число: семь — нуль — семь.

4) Граней — две. Порядок корня: +2.

Ответ: $\sqrt{5000} = 70,7$;

4) Чисто нулевых граней — три. Порядок корня: —3.

$\sqrt{0,0000005} = 0,000707$.

53. Найти корни:

$\sqrt{52,5}$; $\sqrt{0,635}$; $\sqrt{14,4}$; $\sqrt{0,071}$; $\sqrt{895}$; $\sqrt{0,0002}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{10,5}$.

При возведении в квадрат и при извлечении квадратного корня можно для определения места запятой пользоваться еще таким приемом:

1) Пусть требуется найти $(0,0162)^2$.

Пишем:

$0,0162 = 1,62 \cdot 10^{-2}$; $0,0162^2 = 1,62^2 \cdot 10^{-4} = 2,62 \cdot 10^{-4} = 0,000262$.

2) Чему равен $\sqrt{1620}$?

$1620 = 16{,}2 \cdot 10^2$; $\sqrt{1620} = \sqrt{16{,}2} \cdot 10 = 4{,}025 \cdot 10 = 40{,}25$.

3) Найти $\sqrt{0{,}0005}$.

$0{,}0005 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$; $\sqrt{0{,}0005} = \sqrt{5{,}0} \cdot 10^{-2} = 2{,}24 \cdot 10^{-2} = 0{,}0224$.

Путь, следовательно, таков:

При возведении в квадрат из данного числа выделяется в виде множителя такая степень десяти, чтобы оставшееся число было меньше 10, а при извлечении корня — *обязательно четная* (чтобы полностью извлекся корень), так что остается число, меньшее 100.

Этот прием удобно употреблять для грубой проверки ответа в уме.

VIII. КУБЫ И КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ

§ 20. Для кубов, так же как и для квадратов, на линейке есть отдельная шкала — шкала ***K*** — с делениями, втрое более мелкими, чем на шкале ***D***. Она состоит из трех идущих друг за другом одинаковых шкал (подобно тому как шкала ***A*** составлена из двух одинаковых). Деления на каждой из этих трех шкал в точности такие же, как и на каждой половине шкалы ***A*** (только помельче). Правила возведения в куб и извлечение корня такие:

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ КУБА

> Если куб получается в последней (правой) трети шкалы ***K***, то его порядок равен утроенному порядку возвышаемого числа.
> Если в средней трети, то — утроенному порядку минус один.
> Если в первой (левой) трети, то — утроенному порядку минус два.

Пример 1. Найти $1{,}725^3$. Поставим бегунок на 1725 на шкале ***D***.

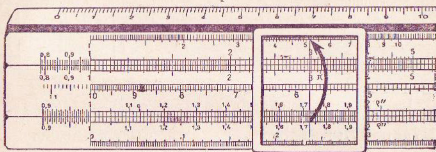


Рис. 45.

Ответ приходится в первой трети (рис. 45). Прочитанное число: пять — один — три.

Порядок возвышаемого числа: $+1$.
Порядок куба: $3 \cdot (+1) - 2 = +1$.
Ответ: $1{,}725^3 = 5{,}13$.

ПРАВИЛО ОБ ИЗВЛЕЧЕНИИ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ

1. Разделите подкоренное число на грани по три цифры в каждой: влево от запятой, если число $\geqslant 1$, и вправо от запятой, если оно < 1.

2. Посмотрите, сколько цифр в крайней левой грани, если число $\geqslant 1$, и в непосредственно следующей за чисто нулевыми гранями, если число < 1.

3. I) Если таких цифр только одна, то ставьте число в первой (левой) трети шкалы *K*;
II) если две,— в средней трети;
III) если три,— в последней (правой) трети.

4. Порядок корня равен числу граней, если подкоренное число $\geqslant 1$, и числу чисто нулевых граней, если оно < 1.

Пример 2. Найти $\sqrt[3]{7700}$ и $\sqrt[3]{0{,}0000077}$.

1) 7'700 — две грани.
2) В крайней грани — одна цифра.

1) 0,000'007'7 — одна чисто нулевая грань.
2) В следующей за чисто нулевой гранью — одна цифра.

3) Так как цифра одна, то устанавливаем 77 в первой (левой) трети шкалы *K* (рис. 46).

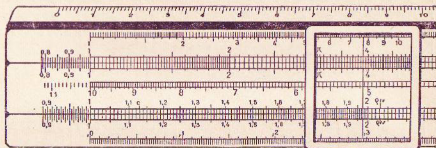


Рис. 46.

Прочитанное число: один — девять — семь — пять.

4) Граней — две. Порядок: + 2.
Ответ: $\sqrt[3]{7700} = 19{,}75$;

4) Граней — одна. Порядок: — 1.
$\sqrt[3]{0{,}0000077} = 0{,}01975$.

54. Найти: $1{,}62^3$; $0{,}071^3$; $0{,}645^3$; $4{,}22^3$.

55. Найти: $\sqrt[3]{0{,}0043}$; $\sqrt[3]{4{,}62}$; $\sqrt[3]{0{,}106}$; $\sqrt[3]{72{,}5}$.

На некоторых линейках шкалы *K* нет. На них извлекать кубические корни сложнее (см. II концентр, стр. 115).

IX. КОМБИНИРОВАННЫЕ ДЕЙСТВИЯ

§ 21. Рассмотрим теперь некоторые комбинированные действия.

56. До сих пор мы делали умножение на шкалах ***C*** и ***D***. Попробуйте теперь произвести эти операции на шкалах ***A*** и ***B***, например, помножьте 6·2; разделите 27:3.

З а д а ч а. Вычислить покороче $2{,}65 \cdot 1{,}78^2$.

Можно решить эту задачу так: возвести в квадрат 1,78, записать результат; затем поставить полученное число на шкале ***D*** и помножить его на 2,65.

Можно решить её к о р о ч е так: поставить бегунок на *1,78* на шкале ***D*** (рис. 47). Тогда визирная линия покажет на шкале ***A*** число

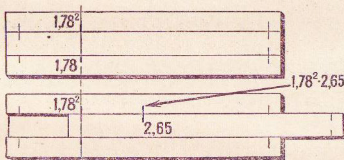


Рис. 47.

$1{,}78^2$. Н е ч и т а я этого числа и не трогая бегунка, переставить движок так, чтобы его черточка *1* совпала с визирной линией. Тогда против *2,65* на шкале ***B*** будет прочитан на шкале ***A*** весь ответ, так как ясно, что при этом $1{,}78^2$ помножится на 2,65.

Способ этот намного короче:

1) не надо читать $1{,}78^2$,

2) не надо ставить его на шкалу.

57. Подсчитайте коротким способом $\frac{2,42^2}{1,55}$.

58. Вычислите $\frac{6,5}{1,42^2}$.

59. Сколько метров пролетит свободно падающий камень за 15,6 сек., если время отсчитывается от начала падения ($g = 981$ *см/сек*^{2})?

60. Вычислите кинетическую энергию товарного поезда в 2050 *т*, идущего со скоростью 45 *км/час*. Не забудьте, что масса равна весу, деленному на g.

X. ОСОБЫЕ ЗНАЧКИ НА ШКАЛАХ

§ 22. 1) $\boxed{\pi = 3{,}14159\ldots}$ на шкалах *C* и *D* (иногда и на *A* и *B*).

61. Диаметр ведущего колеса паровоза — 1570 *мм*. Сколько оборотов делает колесо в минуту при скорости 75 *км/час*?

62. Сколько пойдет рельсов на кривую радиуса 45 *м*, если угол, стягиваемый кривой, равен 26°?

2) $\boxed{C = \sqrt{\frac{4}{\pi}}}$ на шкалах *C* и *D*.

Этот значок служит для вычисления площади по диаметру, и наоборот.

Если S — площадь круга диаметра d, то $S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{C}\right)^2$.

Отсюда следует также $d = C\sqrt{S}$, поэтому:

1) Чтобы по диаметру определить площадь круга, делят d на C, а ответ читают на шкале *A*.

2) Чтобы по площади определить диаметр, поступают наоборот. Площадь ставят на шкале *A*, как подкоренное число квадратного корня, передвигают движок единицей к установленной площади и читают на шкале *D* против *C* диаметр.

Пример. Найти площадь круга $\varnothing = 16{,}2$ *м* (см. решение на

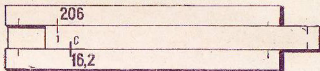


Рис. 48.

рис. 48). Порядок площади определяется как порядок квадрата по порядку $\frac{d}{C}$.

Ответ: $S = 206$ *м*².

63. Вычислить площадь стандартной цирковой арены $\varnothing = 13$ *м*.

64. Объём цилиндрической коробки 6300 *см*³, высота 5 *см*. Вычислить диаметр.

При определении объема цилиндра не надо читать площади основания, так как формулу $V = Sl = \left(\frac{d}{C}\right)^2 \cdot l$ можно вычислять сразу (ср. стр. 45, комбинированные вычисления).

65. Сколько весит чугунная болванка $\varnothing = 300$ *мм*, $h = 800$ *мм*? Удельный вес чугуна 7,2.

На некоторых линейках на бегунке есть три линии. Обе крайние

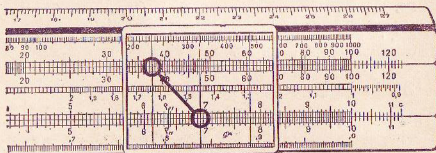


Рис. 49.

линии отстоят от средней как раз на расстоянии, равном $C = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$, так что, поставив среднюю линию на число, указывающее диаметр круга, на шкале *D*, можно прочитать площадь этого круга на шкале *A* против левой линии бегунка (рис. 49).

● *Остальные значки на линейке менее употребительны; о них сказано дальше* (стр. 95 и 125).

XI. ЛИНЕЙКА КАК ТАБЛИЦА

§ 23. Задача. *Составить таблицу для перевода дюймов в миллиметры.*

На линейке эта задача решается так:

$$1'' = 25{,}4 \text{ мм}.$$

Ставят *25,4* против *1*. Тогда против чисел *2, 3,...* будут, очевидно, стоять числа, равные 25,4·2; 25,4·3 и т. д., т. е. переводящие дюймы в миллиметры. То же самое будет и для любого другого числа. Например: 1,55″ = 39,4 *мм* и т. д.

66. Переведите в градусы Реомюра следующие градусы Цельсия: 16; 28; 42; 19,5; 60; 85.

67. Перевести фунты в килограммы: 11; 16,5; 19,6; 180; 37,5; 91,3.

68. Перевести вёрсты в километры: 1560; 960; 70; 20,5; 1,45.

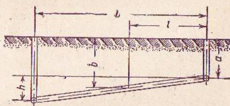


Рис. 50.

69. Уклон канализационной трубы равен 0,03. Глубина заложения около колодца $a = 2{,}65$ *м*. Какова глубина заложения b в 15; 20; 27; 40; 95 *м* от колодца?

Указание. Уклоном трубы называют отношение понижения заложения трубы h (рис. 50) к тому расстоянию L, на которое приходится это понижение; в задаче **69**, например, $h = 3$, $L = 100$.

ВТОРОЙ КОНЦЕНТР

XII. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С КВАДРАТАМИ И КУБАМИ

§ 24. Познакомившись с простейшими приёмами вычислений на линейке, можно будет теперь приступить и к более глубокому ознакомлению с её устройством; это позволит нам не только решать более сложные задачи по готовым схемам, но и самим создавать приёмы для вычисления выражений того или иного вида, встречающихся в практических расчётах. При этом наибольшую важность имеют навыки в проведении вычислений такого рода, которые приходится выполнять много раз, так как здесь, очевидно, незначительное улучшение или ухудшение приёма может в итоге значительно уменьшить или увеличить объём работы.

В первом концентре мы уже столкнулись с некоторыми способами вычисления на линейке, которые позволяли очень быстро и удобно (при одной установке движка) находить целый ряд значений одной и той же величины, проводить много однотипных вычислений (см. §§ 18 и 23; «Пропорции» и «Линейка как таблица»). Теперь эти способы будут разбираться более широко и более подробно.

Пропорциональные вычисления будут играть в дальнейшем большую роль; мы начнём с вопроса, примыкающего к § 18 (стр. 34).

§ 25. Мы уже знаем, что если сдвинуть движок, то стоящие друг против друга числа шкалы ***D*** (которые мы будем обозначать буквой x) и числа шкалы ***C*** (которые мы обозначим через y) связаны зависимостью:

$$\frac{x}{y} = \text{const},$$

иными словами, отношение любых двух стоящих друг против друга чисел x и y сохраняет для всех таких пар постоянную величину [1]) (ср. § 18).

[1]) При несдвинутом движке имеем тривиальный случай $x = y$.

70. Обозначив числа шкалы *А* буквой z, а числа шкалы *К* — буквой u, напишите, каким соотношением связаны числа

$$z \text{ и } x; \quad u \text{ и } x.$$

71. Каким соотношением связаны числа x и y при сдвинутом движке? Числа z и y? Числа u и y?

Указание. Воспользоваться решением задачи **70** и выразить x через z. Тогда, очевидно, соотношение между x и y даст соотношение между z и y, если заменить в нём x его выражением через z.

Итак, рассматривая шкалы *А* и *К* в комбинации со шкалой *С*, мы видим, что для стоящих друг против друга чисел на этих шкалах будут справедливы равенства:

$$\frac{\sqrt{z_1}}{y_1}=\frac{\sqrt{z_2}}{y_2}=\ldots=\frac{\sqrt{z_k}}{y_k} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt[3]{u_1}}{y_1}=\frac{\sqrt[3]{u_2}}{y_2}=\ldots=\frac{\sqrt[3]{u_k}}{y_k},$$

или иначе (возводя эти равенства в квадрат и в куб):

$$\frac{z_1}{y_1^2}=\frac{z_2}{y_2^2}=\ldots=\frac{z_k}{y_k^2} \quad \text{и} \quad \frac{u_1}{y_1^3}=\frac{u_2}{y_2^3}=\ldots=\frac{u_k}{y_k^3}.$$

Этими соотношениями можно во многих случаях с удобством пользоваться; они, например, очень удобны для решения нижеприведённых задач (и аналогичных задач: для корней квадратных и кубических):

1. Найти числа, пропорциональные квадратам данного ряда чисел.
2. Найти числа, пропорциональные кубам данного ряда чисел.

Пример. Вычислить значения $S=491t^2$ для $t=4$; 4,2; 5,65; 8,75.

Если мы будем брать значения t на шкале *С*, то, очевидно, соответствующие значения S будут получаться на шкале *А*. На сколько нужно сдвинуть движок — сообразить нетрудно. При $t=1$ имеем $S=491$. Значит, конец движка (или начало) должен стоять против *491* шкалы *А*, на которой у нас получаются величины S (ср. **59**).

Аналогичные рассуждения позволяют решать также задачи такого рода:

Задача. Найти $u=z^{1,5}=\sqrt{z^3}$. Очевидно, что, поставив z на шкале *А*, мы получим u против него на шкале *К*. В самом деле, обозначая числа шкалы *С* через y, будем иметь:

$$z=y^2, \quad u=y^3,$$

или

$$y=\sqrt{z}; \quad u=(\sqrt{z})^3=\sqrt{z^3}.$$

Пример. Вычислить $2{,}1^{1,5}$. Ставим 2,1 на шкале *А* и читаем на шкале *К* ответ: 3,04.

72. Найти x_1, x_2, x_3 при $x_4 = 6{,}55$:

$$\frac{x_1}{1{,}16^2} = \frac{x_2}{1{,}45^2} = \frac{x_3}{1{,}65^2} = \frac{x_4}{2{,}01^2}.$$

73. Определить α_1, α_2, α_3, α_4:

$$\frac{4{,}75}{\alpha_1^2} = \frac{5{,}62}{\alpha_2^2} = \frac{6{,}50}{\alpha_3^2} = \frac{7{,}10}{\alpha_4^2} = \frac{8{,}00}{1{,}62}.$$

74. Вычислить λ, μ, ν из уравнений:

$$\frac{2{,}55}{\lambda^3} = \frac{4{,}65}{\mu^3} = \frac{7{,}70}{\nu^3} = \frac{11{,}2}{\pi} \quad (\pi = 3{,}1416\ \ldots).$$

75. Консервы выпускаются в банках одинаковой высоты и разного диаметра. Банка в 5 *кг* имеет диаметр 265 *мм*. Каковы должны быть диаметры банок на 2; 1,5; 0,75 *кг*?

Во всех этих вычислениях, так же как и в вычислениях с обычными пропорциями (§ 18), линейка представляет собой инструмент исключительно удобный: без всяких передвижений, при одной установке движка, получается целая серия результатов.

Для вычислений этого типа можно было бы дать правило о порядке, аналогичное тому, которое дано было для пропорций, но оно получилось бы слишком громоздким и неудобным в работе. Поэтому лучше оценивать результаты просто на глаз; в пропорциональных вычислениях это обычно сделать легко.

При вычислениях в некоторых случаях здесь, как и везде, может потребоваться переброска. При этом следует руководствоваться практическим правилом:

● *Если в каком-нибудь вычислении приходится сделать переброску, то сначала нужно записать все те результаты, которые можно получить без переброски, потом перебросить движок и записать остальные.*

Пример. Найти x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 из равенства

$$\frac{9{,}0}{6{,}35^2} = \frac{8{,}0}{x_1^2} = \frac{3{,}0}{x_2^2} = \frac{0{,}5}{x_3^2} = \frac{0{,}2}{x_4^2} = \frac{0{,}15}{x_5^2}.$$

Установив 6,35 шкалы *C* против 9,0 шкалы *A* (в левой её половине), находят: $x_1 = 5{,}98$; $x_2 = 3{,}67$. Чтобы найти x_3, движок перебрасывают (0,5 берут в правой половине шкалы *A*), но x_4 и x_5 отыскивают в том же положении движка, что и x_1 и x_2. Поэтому сначала находят x_4 и x_5, а потом уже, перебросив движок,— последнее число x_3.

XIII. ПЕРЕВЁРТЫВАНИЕ ДВИЖКА

§ 26. Вынем движок из линейки, перевернём его «вверх ногами» и вставим в таком виде обратно (рис. 51). В этом положении под шкалой *A* окажется перевёрнутая шкала *C*, над шкалой *D* — пере-

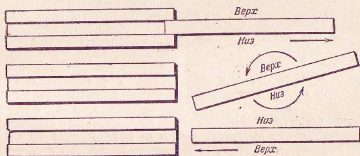


Рис. 51.

вёрнутая шкала *B* (рис. 52). Начало движка придётся над конечным штрихом шкалы *D*, а конец движка — над её началом.

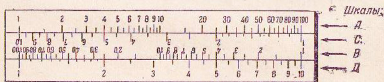


Рис. 52.

76. Поставьте визирную линию бегунка на число *2* шкалы *D* и прочтите число, которое при этом отметит визирная линия на шкале *C* (эта шкала теперь наверху, под шкалой *A*, и цифры на ней стоят «вверх ногами»). Чему равно произведение этих двух чисел? То же для чисел *4, 5, 8.* Заметьте, что на перевёрнутой шкале *C* числа идут, возрастая

справа налево (не так, как обычно на всех шкалах). Поэтому, например, против *4* на шкале ***D*** находится число *2,5* на шкале ***C***, *а не 3,5* (рис. 53).

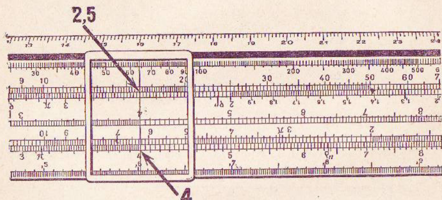


Рис. 53.

Решая задачу **76**, мы познакомились с основным свойством перевёрнутого движка:

● *При перевёрнутом движке произведения стоящих друг против друга чисел на шкалах **C** и **D** равны.*

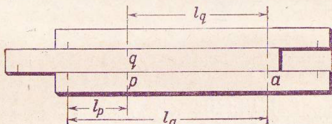


Рис. 54.

Легко понять, почему это так: пусть друг против друга стоят числа p и q, а движок сдвинут так, что его начало приходится против числа a (рис. 54). Тогда, очевидно:

$$l_p + l_q = l_a,$$

где l_p, l_q и l_a — расстояния, на которые отстоят от начала штрихи со значками p, q, a. Но известно, что

$$l_p = m \log p, \quad l_q = m \log q, \quad l_a = m \log a$$

(m — длина единицы масштаба).

Значит:

$$m(\log p + \log q) = m \log a,$$
$$\log (pq) = \log a,$$
$$pq = a;$$

равенство это справедливо для любых чисел p и q, стоящих друг против друга.

В этом доказательстве основную роль играет то обстоятельство, что у перевёрнутого движка начало шкал приходится там, где в обычном положении находится конец.

При решении задачи **76** получалось, что все произведения равны десяти:

$$2 \cdot 5 = 10;\ 4 \cdot 2{,}5 = 10;\ 5 \cdot 2 = 10;\ 8 \cdot 1{,}25 = 10;$$

так оно и выходит, если считать числа, написанные на шкалах, за единицы. Но на практике часто удобнее считать все эти произведения равными единице, то-есть считать числа шкалы *C* обратными величинами по отношению к числам шкалы *D*. В этом случае можно сказать, что при перевёрнутом движке линейка даёт таблицу обратных величин.

§ 27. До сих пор движок был полностью вдвинут в линейку, так что его начало и конец совпадали с концом и началом шкал линейки. Теперь мы разберём, что даёт его передвижение.

77. Сообразите, как производить умножение при помощи перевёрнутого движка. Нужно помнить, что: 1) шкала *C* — «обратная» по отношению к шкале *D* и что 2) произведение $a \cdot b = a : \frac{1}{b}$.

78. Как выполнять деление?

79. Останутся ли в силе прежние правила о порядке произведения и частного при таком умножении и делении?

Указание. Если трудно разобрать этот вопрос в общем виде, то сначала нужно рассмотреть, что происходит, например, при умножении 2 на 3, на 4, на 5, на 6 и т. д. Сделать отсюда выводы.

80. Каким способом удобнее производить умножение: старым или новым, и почему? Тот же вопрос относительно деления.

Указание. Вспомните, что при производстве умножения у нас иногда не получался ответ (приходилось делать умножение, выдвигая движок влево). Может ли быть такое положение при новом способе умножения?

Чтобы свободно и уверенно применять линейку с перевёрнутым движком, нужно твёрдо помнить основное свойство перевёрнутого движка:

> Любые два стоящих друг против друга числа на шкалах *C* и *D* дают одно и то же произведение.

Величину этого произведения легко узнать, посмотрев, какое число стоит на шкале D против единицы шкалы C, или наоборот.

Ясно, что если

$$ab = 1 \cdot x,$$

то x и есть величина произведения.

Пример 1. Найти величину произведения 1,315 на 2,67. Устанавливают друг против друга 1,315 и 2,67 (рис. 55). Тогда:

$$1{,}315 \cdot 2{,}67 = 1 \cdot 3{,}51 = 3{,}51 \cdot 1.$$

Число, выражающее произведение на шкале C, находится против единицы на шкале D; оно же находится на шкале D — против единицы на шкале C.

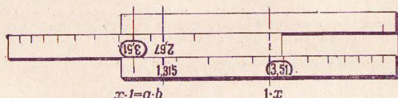


Рис. 55.

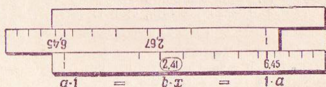


Рис. 56.

Пример 2. На сколько надо умножить 2,67, чтобы получить 6,45 (рис. 56)?

Устанавливают 6,45 против 1. Тогда против 2,67 на одной из шкал стоит искомое число на другой шкале:

$$6{,}45 \cdot 1 = 2{,}67 \cdot 2{,}41 = 1 \cdot 6{,}45.$$

81. Решить одной установкой движка такие пропорции:

$1{,}63 \cdot 3{,}12 = x \cdot 2{,}86$; $0{,}0345 \cdot 625 = 7{,}05 \cdot x$; $x \cdot 4{,}62 = 1{,}975 \cdot 0{,}825$.

Хотя все эти задачи легко можно решить и при обычном положении движка, всё же уже и здесь легко заметить некоторые особенности, характеризующие перевёрнутый движок. Например: при перевёрнутом движке удобнее производить умножение, а при непе-

ревёрнутом — деление; при перевёрнутом движке удобнее решать пропорции, написанные в виде равенства произведений, а при неперевёрнутом — в виде равенства отношений и т. д. Однако основная ценность перевёрнутого движка вскроется лишь в дальнейшем (стр. 60).

● *Нужно заметить, что всё сказанное до сих пор справедливо только для шкал **C** и **D**. Если мы будем рассматривать стоящие друг против друга числа других шкал (например, **C** и **A**), то для них правило о постоянстве произведения не будет верно.*

Прямая и обратная пропорциональность

§ 28. В § 23 было показано, что линейка с обычным положением движка может заменить собой таблицу для перевода одних мер в другие. Это можно выразить следующими словами:

*линейка с движком в обычном положении даёт таблицу значений **прямо пропорциональных** величин, связанных зависимостью:* $y = kx$.

При этом коэффициент пропорциональности k — это то число шкалы значений y, на которое устанавливается начало (единица) шкалы значений x (рис. 57).

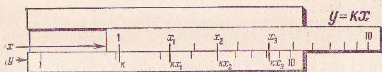


Рис. 57.

Числа, стоящие друг против друга на линейке с перевёрнутым движком, связаны, как было показано в предыдущем параграфе, соотношением

$$xy = k.$$

Если считать, что на одной из шкал (например C) мы берём значения x, то на другой шкале (D) против этих значений x будут стоять значения $y = \frac{k}{x}$, т. е.

*линейка с перевёрнутым движком даёт таблицу значений **обратно пропорциональных** величин, связанных зависимостью* $y = \frac{k}{x}$.

При этом коэффициент пропорциональности k — это то число одной из шкал, против которого стоит начало (или конец) другой шкалы (рис. 58).

Это основное различие между свойствами обычного и перевёрнутого положения движка и решает вопрос о том, какое положение удобно или неудобно в том или ином конкретном случае.

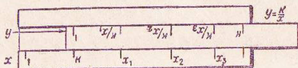


Рис. 58.

82. С каким положением движка нужно применять линейку при таких вычислениях:

а) умножение одного и того же числа на ряд чисел (т. е. нахождение величин $a \cdot b_1$, $a \cdot b_2$, $a \cdot b_3$ и т. д.);

б) деление одного и того же числа на ряд чисел;

в) деление ряда чисел на одно и то же число;

г) решение задачи: сколько процентов составляет число a от числа b, для одного и того же числа a и ряда разных чисел b, и наоборот: для одного и того же числа b и ряда чисел a?

Указание 1. Для решения задачи нужно записать условие в виде формулы, обозначая данное число из ряда чисел через x, а искомое число — через y, и посмотреть, прямая или обратная пропорциональность имеется между числами x и y.

Указание 2. Если a составляет $y\%$ от b, то это значит, что $a = \frac{y}{100} b$, т. е. $y = \frac{100a}{b}$.

Каждую из следующих задач надо решить одной установкой движка.

83. В цилиндре воздушной помпы при расстоянии поршня от дна цилиндра, равном 28,5 *см*, измерено давление в 1,5 атмосферы. Какое давление будет при расстоянии 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10 *см*?

Примечание. Предполагается справедливым закон Бойля-Мариотта: произведение величин объёма и давления постоянно.

84. Приработок за выполнение сдельной работы, выполненной в неурочное время, равен 19 р. 80 к. Сколько процентов составляет он от месячной зарплаты в 45 р., 52 р. 50 к., 60 р., 67 р. 50 к., 75 р.?

85. 12 экскаваторов вырыли котлованы для фундаментов в 38 дней. Во сколько дней закончат ту же работу 10, 25, 40 экскаваторов?

● *В некоторых случаях при решении таких задач может потребоваться «переброска» движка (см. стр. 32). Так, например, задав в задаче* **85** *вопрос — во сколько дней закончат ту же работу 55 экскаваторов,— мы уже не смогли бы получить ответ без переброски движка. Только передвинув движок так, чтобы его конечный штрих встал на место начального, мы решим задачу.*

Перевёрнутый движок в комбинации со шкалами A и K

§ 29. Числа шкалы *A* — квадраты чисел шкалы *D*, а числа шкалы *D* — квадратные корни из чисел шкалы *A*.

Числа x шкалы *D* и числа y шкалы *C* связаны соотношением

$$xy = \text{const}.$$

86. Каким соотношением связаны числа z шкалы *A* и числа y шкалы *C*?

Употребляя шкалы *A* и *C* (и возводя в квадрат предыдущее равенство), мы приходим к соотношению между числами z шкалы *A* и числами y шкалы *C*:

$$\sqrt{z}\cdot y = \text{const}, \text{ или } zy^2 = \text{const}.$$

Таким образом, при перевёрнутом движке мы можем одной установкой решать задачи такого рода:

1) Найти числа, обратно пропорциональные квадратам чисел данного ряда.

2) Найти числа, обратно пропорциональные квадратным корням из чисел данного ряда, и т. д.

Пример. Известно, что при течении жидкости в трубах скорость течения через трубу, имеющую данное сечение, обратно пропорциональна площади этого сечения. С другой стороны, давление p и скорость течения v связаны зависимостью[1]):

$$p = kv^2.$$

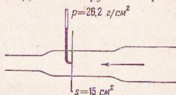


Рис. 59.

Измерение давления жидкости, текущей в трубе, дало 26,2 $г/см^2$ в сечении, площадь которого $s = 15$ $см^2$ (рис. 59). Какие надо взять площади сечений, чтобы давления в них были 15,0; 20,0; 25; 30 $г/см^2$?

Решение. Обозначая площадь сечения через s, имеем:

$$v = \frac{k_1}{s}, \text{ или } \sqrt{p} = \frac{k_2}{s}, \text{ т. е. } s\sqrt{p} = \text{const}.$$

---

[1]) Зависимости эти в действительности сложнее, указанные в тексте формулы годны в качестве первого приближения.

Мы можем изобразить эту зависимость на шкалах A и C при перевёрнутом движке (ср. стр. 57). Шкала A будет служить для p, а шкала C — для s. Ставим друг против друга 26,2 на шкале A и 1,5 на шкале C и сейчас же находим против 15,0 на шкале A — число 19,8 на шкале C; против 20,0 на шкале A — число 17,2 на шкале C и т. д.

Ответ:

p	26,2	15,0	20,0	25,0	30,0
s	15	19,8	17,2	15,4	14,0

87. В круглой трубе вода течёт через сечение $\varnothing = 25$ *см* со скоростью 0,93 *м/сек*. С какой скоростью будет течь вода через сечения

$$\varnothing = 12{,}0;\ 14{,}5;\ 19{,}0;\ 27{,}5;\ 32{,}4 \text{ см?}$$

Указание. Имейте в виду приведённое в рассмотренном примере соотношение между скоростью течения и площадью сечения трубы:

$$sv = \text{const}.$$

88. Удлинение Δl сантиметров нагружённой грузом в P килограммов проволоки длиной l сантиметров и диаметром d сантиметров даётся формулой

$$\Delta l = \frac{lP}{d^2 \frac{\pi}{4} E}.$$

Требуется подсчитать удлинения для проволок разных диаметров:

$$d = 0{,}75;\ 1{,}25;\ 2{,}50;\ 4{,}55 \text{ мм},$$

одной и той же длины $l = 1$ *м* при нагрузке в 10 *кг*. Модуль упругости $E = 2\,200\,000$ *кг/см*^{2}.

Примечание. Нужно иметь в виду, что линейные размеры в задаче даны в разных мерах (*мм, см, м*). Их надо привести к сантиметрам.

Основная выгода и удобство перевёрнутого движка заключаются в возможности использования счётной линейки как таблицы для различных случаев обратной пропорциональности.

При одной и той же установке движка мы решали целый ряд аналогичных задач. Это — в высшей степени важное обстоятельство. Для того чтобы линейка была использована с наибольшим эффектом, при решении каждой задачи нужно выбирать наиболее экономичные способы её использования и, где есть возможность, не передвигать движка.

● *Каждая передвижка — источник погрешностей при установке и бесполезная потеря времени. Движок нужно передвигать только в случае безусловной необходимости. Нужно приучать себя к экономии в этом отношении.*

Если вы видите двух работников, считающих на линейке, причём у одного из них заметите одну-две передвижки движка, за то время, за которое второй сделал десять передвижек, — вы можете быть уверены, что второй хуже знает возможности линейки, хуже умеет считать, чем первый.

Искусство счёта на линейке заключается не в быстроте передвижений движка, хотя «порхающий движок» и выглядит эффектно.

§ 30. Рассматривая стоящие друг против друга числа шкал K и C при перевёрнутом движке, мы получаем, что для этих чисел w (шкалы K) и y (шкалы C) будут справедливы соотношения:

$$\sqrt[3]{w}\cdot y = \text{const}, \quad w\cdot y^3 = \text{const},$$

или

$$y = \frac{k}{\sqrt[3]{w}}, \quad w = \frac{k}{y^3}.$$

89. Величины W и p связаны соотношением

$$W\sqrt[3]{p} = k.$$

При $p = 10{,}7$ имеем $W = 36{,}3$.
Чему равно W при $p = 3{,}15$; $6{,}35$; $8{,}8$; $12{,}6$; $20{,}5$?
Чему равно p при $W = 45{,}0$; $40{,}0$; $35{,}0$; $30{,}0$; $25{,}0$; $20{,}0$?

90. $y = \frac{k}{x^3}$. Чему равна константа k, если при $x = 0{,}42$ имеем $y = 0{,}036$?

Порядок при вычислениях с перевёрнутым движком

§ 31. Вопрос о порядке в большинстве вычислений с перевёрнутым движком разрешается сам собой: когда, например, даются соответствующие друг другу значения скорости и диаметра трубы (задача **87**) — при $\varnothing = 25$ *см* $v = 0{,}93$ *м/сек*, никому не придёт в голову, что при $\varnothing = 27{,}5$ *см* $v = 7{,}7$ *м/сек* или $v = 0{,}077$ *м/сек*. Ясно, что правильный ответ: $v = 0{,}77$ *м/сек*, — это видно из сравнения с данной величиной скорости.

При вычислениях с перевёрнутым движком справедливо следующее правило, аналогичное «правилу о порядке в пропорциях»:

ПРАВИЛО О ПОРЯДКЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ С ПЕРЕВЁРНУТЫМ ДВИЖКОМ

> При вычислениях с перевёрнутым движком для каждой пары чисел x и y, стоящих друг против друга на шкалах C и D и образующих равные произведения, сумма порядков сомножителей, при одном и том же положении движка, одна и та же.

Ценность этого правила вот в чём.

Если при какой-нибудь установке движка друг против друга стоят числа x_1 и y_1, x_2 и y_2 и т. д. (рис. 60), причём все числа x_1, x_2,... одного и того же порядка, то можно утверждать, что и все числа y_1, y_2... тоже одного и того же порядка.

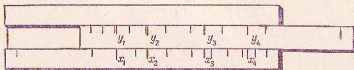


Рис. 60.

Почему это так — ясно: пусть порядок x_1 будет p_1, порядок x_2 будет p_2 и т. д. Порядки соответствующих чисел y_k пусть будут q_k. Тогда по правилу должно быть:

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_k + q_k.$$

Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$, то должно быть и $q_1 = q_2 = \ldots = q_k$...

Пример. Решая задачу 81, мы находили x из пропорции $1{,}63 \cdot 3{,}12 = x \cdot 2{,}86$. Для этого мы установили друг против друга числа 1,63 и 3,12 (одно на шкале *C*, другое на шкале *D*). Затем против 2,86, взятом на одной из шкал, мы прочли на другой: один — семь — восемь. Так как числа 2,86 и 3,12 — одного и того же порядка, то на основании правила мы заключаем, что ответ — того же порядка, что и 1,63, т. е. $x = 1{,}78$. Если бы было дано $1{,}63 \cdot 3{,}12 = x \cdot 0{,}286$, то, очевидно, на основании того же правила было бы получено $x = 17{,}8$. Мы рассуждали бы так: 0,286 имеет порядок, на единицу меньший, чем 3,12; значит, чтобы сумма не изменилась, x должен иметь порядок, на единицу больший, чем 1,63.

Доказать это правило о порядке не составляет никакого труда. Так как все числа, стоящие друг против друга на шкалах *C* и *D*, в одном и том же положении движка дают равные произведения, то, очевидно, и порядки этих произведений должны быть равны. Так как порядок произведения равен или сумме порядков сомножителей, или меньше этой суммы на единицу, и так как все произведения получаются в одинаковых условиях, то (сохраняя обозначения предыдущего доказательства) получаем:

или

$$p_1 + q_1 - 1 = p_2 + q_2 - 1 = p_3 + q_3 - 1 = \ldots = p_k + q_k - 1,$$

или же

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_k + q_k.$$

В обоих случаях правило доказано.

Кроме этого правила, в некоторых случаях будут небесполезны следующие замечания, облегчающие контроль вычислений:

I. При перевёрнутом движке шкала *C* идёт, возрастая, справа налево, а не слева направо, как все другие шкалы на самой линейке.

Пользуясь этим замечанием, мы узнаём, с какой стороны от данного числа нужно искать числа, бо́льшие его, и с какой—меньшие.

II. Устанавливая какое-либо число на шкале A (или K), нужно ставить его так, как если бы мы собирались извлекать из него корень.

В некоторых случаях это, может быть, и не нужно, но зато такая привычка спасёт нас во многих случаях от ошибки.

Польза этого правила заключается в том, что при указанной установке мы всегда спокойны за верность **корня** *из установленного числа на шкале D. А так как при перевёрнутом движке основным уравнением, связывающим стоящие друг против друга числа z и y шкал A и C, является уравнение $zy^2=k$, то возможность проверки выполнения именно этого уравнения особенно ценна.*

● *Нужно иметь, однако, в виду следующее: иногда установка не на своей половине может спасти от переброски. В этом случае целесообразнее, конечно, сделать такую установку. При этом нужно только более внимательно следить за вычислением.*

Пример. Вот пример применения этих замечаний.

Решение задачи 90.

Дано, что $y=\frac{k}{x^3}$; при $x=0{,}42$ $y=0{,}036$.

Чему равно k?

Нетрудно сообразить, что для значений y мы употребим шкалу K, для значений x — шкалу C. Так как $y=0{,}036$ соответствует $x=0{,}42$, то ставим их друг против друга; при этом ставим $y=0{,}036$ в средней трети шкалы K (рис. 61) в соответствии с замечанием II этого параграфа и правилом извлечения

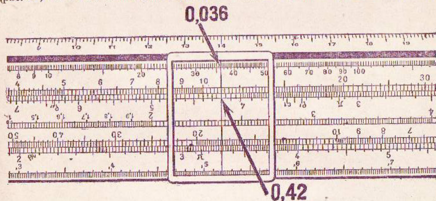


Рис. 61.

кубического корня (см. стр. 44). Теперь замечаем, имея в виду правило I, что числа шкалы C идут, возрастая налево, и потому $x=1$ находится слева от 0,42 (на левом конце движка). Против этого левого конца, очевидно, и находится $y=k$ на шкале K. Мы читаем на шкале K цифры два — шесть — семь.

Относительно порядка этого числа сомнений быть не может: оно приходится в левой трети шкалы *K* и, поскольку в средней трети у нас стояло число 0,036, может значить только 0,00267 (числа налево убывают).

Ответ: $k = 0,00267$.

Если это решение не совсем ясно, нужно обратить внимание на то, что значат цифры, нанесённые на шкалах. Так как на шкале *C* мы установили 0,42, то идущие налево цифры 5, 6 и т. д. означают 0,5; 0,6 и т. д. до 1,0. На шкале *K* было установлено 0,036; поэтому идущие влево цифры обозначают: *3* — 0,03, *2* — 0,02, *1* — 0,01, *9* — 0,009, *8* — 0,008 и т. д. до 0,002.

Вот ещё одно практическое правило, которое поможет нам ориентироваться в вычислениях со шкалами *A* и *K*.

● *Чтобы легко запомнить, на каких шкалах какие величины нужно ставить, заметим следующее:*

Употребляя шкалы ***A*** *и* ***K****, мы имеем дело со шкалами более мелкими (шкала* ***A*** *мельче* ***C*** *в два раза, шкала* ***K*** *мельче* ***C*** *в три раза). На этих шкалах и числа надо устанавливать более мелкие, например, если дано, что* $a^3b = k$, *то числа b «втрое мельче» чисел a (числа a входят в кубе), на шкале* ***K*** *ставят b, на шкале* ***C*** *ставят a.*

Если дано, что $\sqrt{x} \cdot y = k$, *то числа x «вдвое мельче» чисел y (из чисел x извлечён корень), поэтому числа x ставим на шкале* ***A****, числа y — на шкале* ***C****.*

XIV. ОБРАТНАЯ ШКАЛА

§ 32. На некоторых линейках посредине движка нанесена третья шкала — шкала ***R***, часто с красными цифрами (поэтому её иногда называют «красной шкалой») (рис. IV, вклейка между стр. 34 и 35). Шкала эта — не что иное, как нанесённая в обратном направлении шкала ***C*** или, что то же, «перевёрнутая шкала» ***C***. Понятно поэтому, что на линейках с обратной шкалой нет необходимости перевёртывать движок: применяя обратную шкалу как шкалу ***C*** перевёрнутого движка, мы можем делать все указанные выше вычисления.

Отметим специальные особенности работы с линейками, имеющими обратную шкалу:

I. *Если линейка имеет обратную шкалу, то для умножения нужно пользоваться обратной шкалой, деля первый множитель, взятый на шкале **D**, на второй, взятый на шкале **R**.*

Это — известное всем хорошим счётчикам правило «умножения посредством красных цифр». Выгоды этого способа ясны из решения задачи **80.**

II. *На линейке с обратной шкалой одной установкой движка вычисляются выражения вида $a \cdot b \cdot c$.*

Умножая a на b посредством обратной шкалы, мы имеем возможность, не сдвигая движка, получить ещё обычным способом и произведение ab на c. Здесь — полная аналогия с вычислением на обычной линейке выражений вида $\frac{a \cdot b}{c}$.

Пользуясь этим замечанием, можно сократить работу при вычислении выражений вида:

$$a \cdot b \cdot c,$$

если вычислять их по схеме:

$$a \underset{R}{\times} b \underset{O}{\times} c \underset{R}{\times} d \underset{O}{\times} \ldots \underset{O}{\times} m,$$

где знак $\underset{R}{\times}$ означает умножение посредством обратной шкалы, а $\underset{O}{\times}$ обычное умножение.

91. Вычислить, применяя это правило:

$2{,}13 \cdot 4{,}24 \cdot 4{,}86 \cdot 7{,}26 \cdot 3{,}08 \cdot 1{,}37$; $0{,}063 \cdot 12{,}05 \cdot 0{,}199 \cdot 8{,}13 \cdot \pi$.

XV. ЛОГАРИФМЫ

§ 33. Внизу линейки нанесена шкала L. Она содержит мантиссы логарифмов чисел шкалы D. Чтобы найти нужный логарифм, ставят бегунок на число шкалы D и читают мантиссу по шкале L.

Деления шкалы L — равномерные, причём деления третьего разряда идут через две единицы (как в промежутке 2—4 шкалы D — «деления II сорта», см. рис. II, вклейка между стр. 14 и 15).

Таким образом, например, написанные на рис. 62 числа — мантиссы логарифмов соответствующих чисел шкалы D. Характеристики вычисляются по обычным правилам — без линейки.

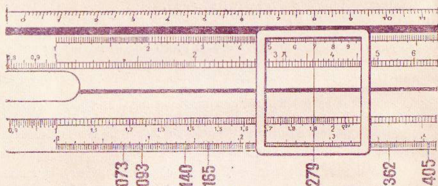


Рис. 62.

Пример 1. Найти log 3,5.

Ставят визирную линию на 3,5 на шкале D. На шкале L читают: пять — четыре — четыре. Значит, мантисса log 3,5 — пять — четыре — четыре. Характеристика, очевидно, — нуль.

Ответ: log 3,5 = 0,544.

92. Найти log 65,5; log 2,44; log 0,0167. Ответы проверьте по таблицам логарифмов.

Отсюда очевидно, что шкала L счётной линейки заменяет трёхзначные таблицы логарифмов.

Отыскание числа по его логарифму также просто.

Пример 2. Дано, что $\log N = 0,167$. Найти N.

Ставят визирную линию на один — шесть — семь на шкале L. На шкале D читают: один — четыре — шесть — девять. Характеристика — нуль; значит, число имеет один знак до запятой.

Ответ: $N = 1,469$.

93. Вычислить N, если $\log N = 2,343$; 0,967; 0,265; 1,960; 2,096; —0,867; — 1,357.

94. Вычислить $10^{1,6}$; $10^{4,23}$; $10^{0,001}$; $10^{2,075}$; $10^{-2,34}$; $10^{-0,16}$.

Указание. Если $\log N = \alpha$, то чему равно 10^{α}?

Логарифмические вычисления на линейке

§ 34. При наличии счётной линейки прибегать к помощи логарифмов приходится почти исключительно при вычислении сложных степенных выражений вида $1,62^{0,91}$; $0,5^{-1,6}$ и т. д. или таких выражений, в которые уже входят логарифмы, например: $\frac{1}{\log 0,35}$, $\log 6,24$, $\log 2,3$ и т. п.

Пример 1. Найти $1,62^{0,91}$.

Если $x = 1,62^{0,91}$, то $\log x = \log 1,62^{0,91} = 0,91 \cdot \log 1,62$.

Ставят визирную линию на 1,62 на шкале D. Читают на шкале L два — один. $\log 1,62 = 0,21$.

Затем умножают, как обычно, 0,21 на 0,91. Получают: 0,191.

Значит, $\log x = 0,191$. Ставят бегунок на один — девять — один на шкале L и читают на D: один — пять — пять — два.

Ответ: $1,62^{0,91} = 1,552$.

95. Вычислить: $2,67^{1,55}$; $0,093^{3,72}$; $1,14^{-2,81}$; $2^{0,6}$; $\pi^{2,12}$; $e^{1,6}$.

Примечание. Величину $\log e = 0,434$ полезно помнить, так как пользоваться ею приходится довольно часто.

В тех случаях, когда приходится много раз вычислять выражения вида $a^{-\alpha}$ (с отрицательным показателем), целесообразно воспользоваться свойствами перевёрнутого движка (или обратной шкалы, если она имеется на линейке). Так как $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$, то придётся вести вычисления для a^{α}, а затем взять обратную величину найденного результата.

Пример. Вычислить $10^{-3,27}$.

$$10^{-3,27} = \frac{1}{10^{3,27}}.$$

Ставят бегунок на два — семь на шкале L, а ответ читают *не на шкале D, а на шкале R* (движок должен быть установлен так,

чтобы его начало и конец совпадали с началом и концом линейки если шкалы *R* нет, то переверните движок). Получают: пять — три — семь. Так как

$$10^{-3,27} = 10^{-3} \cdot 10^{-0,27} = 0,001 \cdot 0,537,$$

то окончательно получается:

$$10^{-3,27} = 0,000537.$$

96. Отношение между напряжениями S_1 и S_2 концов ленты ленточного тормоза даётся формулой:

$$S_1 : S_2 = e^{\mu x},$$

где μ — коэффициент трения, x — угол охвата ленты (рис. 63) в радианах; $S_2 = 824$ *кг*; $\mu = 0,39$; $x = \frac{4}{3}\pi$. Найти S_1.

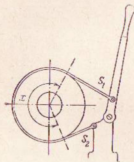


Рис. 63.

● *Вычисляя на линейке выражение вида* $\log a^2 b$; $\log \sqrt{ab}$ *и т. п., одним словом, логарифм такого выражения, которое может быть само вычислено на линейке, поступают всегда так: сначала вычисляют выражение, логарифм которого ищется, и по готовому результату берут логарифм. Нужно стараться при этом, чтобы результат получился на шкале* **D**. *Тогда, не читая его, получают одновременно и логарифм на шкале* **L**.

Примечание. *Этот способ противоположен тому, который мы применяли в алгебре. Там мы сначала логарифмировали, получали логарифм результата и по нему находили самый результат (если это было нужно). На линейке же такое вычисление гораздо дольше и труднее, чем непосредственное отыскание результата и уже потом — его логарифма.*

XVI. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Обратная сторона движка

§ 35. Вынем движок из линейки и рассмотрим его обратную сторону. На ней нанесены три шкалы, против которых (на правом конце движка) стоят буквы «*S*», «*T*», «*S&T*» [1]). Это — шкалы тригонометрических величин: шкала синусов (шкала *S*), тангенсов (*T*) и синусов и тангенсов малых углов (*S&T*). Все эти шкалы связаны со шкалой *D* (на линейке), так же как уже известная нам шкала логарифмов (шкала *L*). Разница только в том, что шкала *L* нанесена на самой линейке, так же как и шкала *D*, а тригонометрические шкалы нанесены на движке. Поэтому, чтобы использовать их параллельно со шкалой *D*, нужно вдвинуть движок в линейку обратной стороной кверху и установить его так, чтобы начальные и конечные линии всех шкал совпадали (см. рис. V, вклейка между стр. 34 и 35). Теперь можно, устанавливая бегунок на какой-нибудь штрих одной из тригонометрических шкал, прочитывать соответствующее число на шкале *D* и узнавать этим способом величину синуса или тангенса того угла, который был отмечен на шкале *S* или *T*. Операция эта нисколько не сложнее, чем отыскивание по логарифму, отмеченному на шкале *L*, соответствующего ему числа на шкале *D*.

Тригонометрические шкалы

§ 36. Чтобы пользоваться шкалами *S*, *T*, *S&T*, прежде всего нужно изучить их деления.

Шкала *S*

Это — самая верхняя из шкал движка. На ней деления идут от 5°44′ до 90° (почему шкала начинается с 5°44′ — будет сказано дальше). Шкала эта, как и все шкалы линейки [2]), неравномерна и вследствие этого разделена неодинаково.

---

[1]) Знак & означает союз «и»: *S* & *T* — «синусы и тангенсы».

[2]) Кроме шкалы *L*.

Она разделяется на такие участки:

1-й	участок	— от	начала	до	10°,
2-й	»	— »	10	»	20°,
3-й	»	— »	20	»	40°,
4-й	»	— »	40	»	70°,
5-й	»	— »	70	»	80°,
6-й	»	— »	80	»	90°.

В каждом из этих участков шкала разделена по-разному; такое разнообразие делений происходит от того, что шкала очень сильно сжата к правому концу (к 90°) — значительно больше, чем, например, шкалы ***C*** и ***D***.

В каждом из указанных участков нанесены деления для градусов и для минут (пока это возможно).

Рассмотрим внимательно рис. VI (вклейка между стр. 70 и 71). На нём изображены тригонометрические шкалы так, как они нанесены на движке, и, кроме того, шкалы ***S*** и ***S&T*** в увеличенном виде и притом так, что разные участки отделены друг от друга. (Шкала *T* не нарисована, так как она значительно проще, и разобраться в ней мы сможем и без особого чертежа.) Займемся шкалой *S*.

Прежде всего нам надо разобраться в делениях на градусы. Опорными пунктами здесь являются десятки градусов — это деления, против которых стоят числа *10, 20, 30, ... , 80*.

97. Найдите эти деления на линейке.

Каждый из промежутков между этими делениями разделён на десять частей штрихами, соответствующими отдельным градусам. На первом и втором участках эти деления отмечены цифрами (*6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., 20*)[1].

В третьем участке (и дальше — в четвёртом, пятом) градусные деления распознавать легко: это — единственные чёрточки, выступающие в этих участках за горизонтальную линию, идущую вдоль всей шкалы. Кроме того, в 3-м участке отмечены цифрами 25° и 35°.

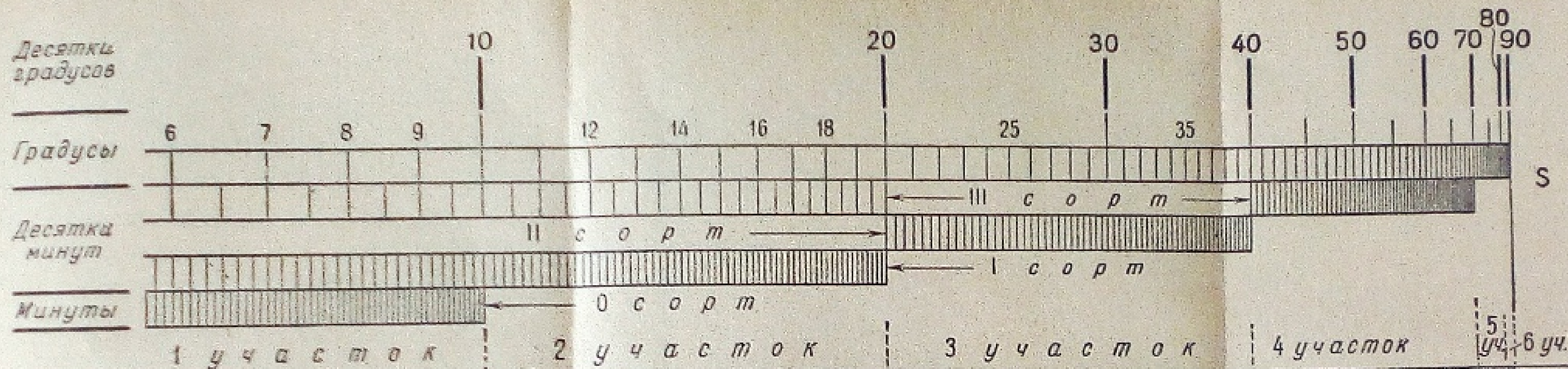
98. Найдите все эти деления и рассмотрите их особенности на разных участках.

99. Установите бегунок на такие деления: 8°, 11°, 12°, 35°, 60°.

100. Установите бегунок на 21°, 34°, 28°, 46°, 53°, 62°, 68°, 76°.

В промежутках между градусными делениями нанесены более мелкие деления. Эти деления — разные в разных участках. Мы начнём со второго участка. В этом участке каждый градус (промежуток между двумя последовательными градусными делениями) разделён на шесть частей, так как в градусе 60 минут. Каждое деление, следовательно, соответствует десяти минутам.

[1]) На некоторых линейках отмечены только чётные числа.



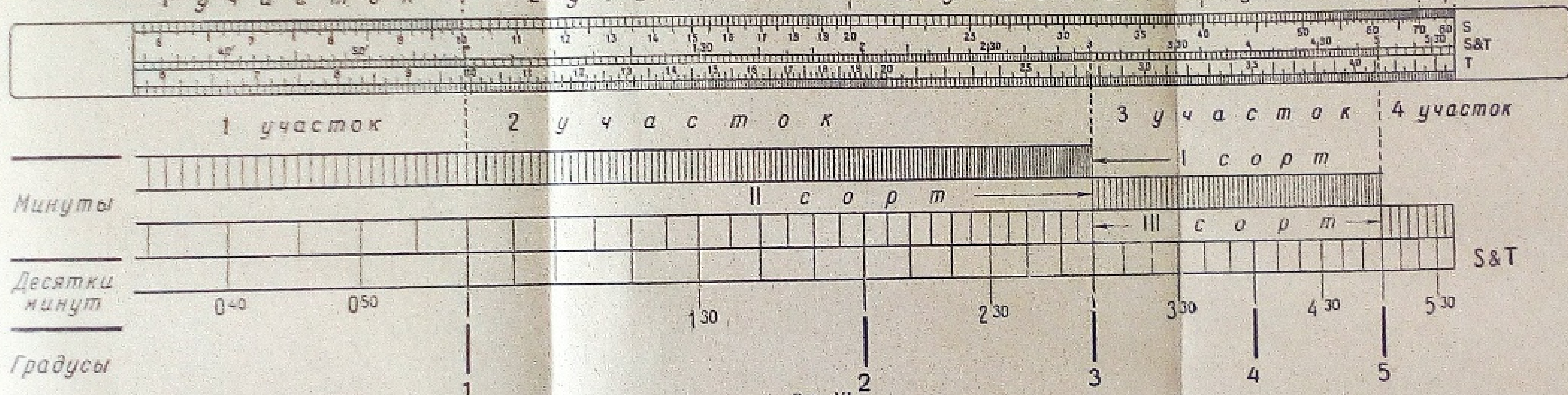


Рис. VI

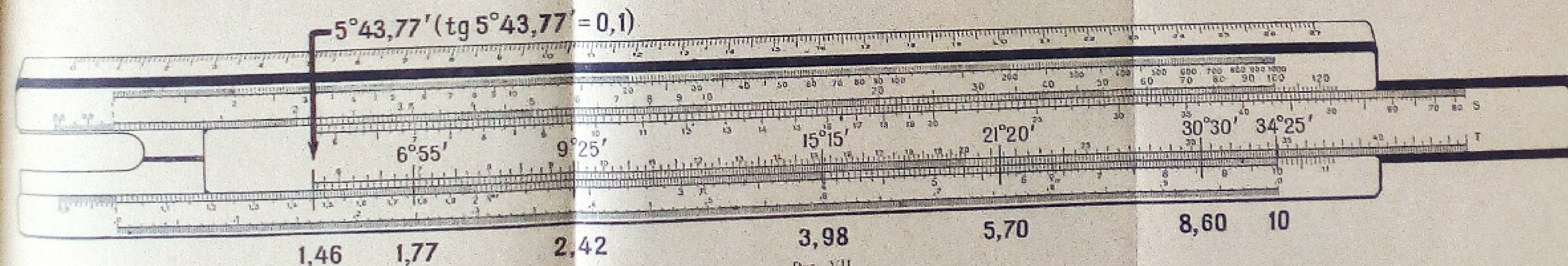


Рис. VII

Это — деления I сорта на рис. VI. Деления эти продолжаются и в первом участке (см. рис. VI), но там, кроме этих делений, нанесены ещё деления нулевого сорта, делящие пополам промежуток между делениями I сорта и соответствующие, следовательно, пяти минутам.

101. Найдите эти деления на шкале S.

● *Нужно обратить внимание на следующее различие между делениями I сорта в первом и во втором участках: в первом участке деления I сорта выходят за горизонтальную линию, идущую вдоль шкалы, а во втором — не выходят. Следует также не путать деления нулевого сорта в первом участке с делениями I сорта (в особенности в начале шкалы, около 6°, где промежутки между делениями нулевого сорта очень крупны).*

В третьем участке делений I сорта уже нет; здесь идут деления II сорта. Каждый градус разделён здесь на три части, и каждый промежуток между делениями II сорта соответствует, следовательно, двадцати минутам.

102. Найдите эти деления на линейке.

Начиная с 40°, и эти промежутки оказываются уже слишком крупными. В 4-м участке каждый градус разделён только на две части по 30 минут каждая; это — деления III сорта.

103. Найдите их на линейке.

Самыми удобными являются, конечно, деления I сорта, к делениям II и III сорта нужно привыкнуть.

● *Чтобы уверенно различать все эти деления, нужно заметить, на сколько частей разделён градус: на 6, на 3 или на 2.*

104. Имеются ли деления более мелкие, чем градусные, в 5-м участке (от 70° до 80°)?

Примечание. *На некоторых линейках пятый участок начинается с 60° (а не с 70°, как на рис. VI); деления III сорта идут только до 60°, а с 60° до 80° имеются только градусные деления. На таких линейках промежуток от 80° до 90° обычно вовсе не имеет делений.*

Наконец, в 6-м участке (от 80° до 90°) даже градусные деления нанести невозможно. В нём нанесены только три штриха, соответствующие по порядку 82°, 84° и 86°. Дальше 86° делений нет. Теперь шкала S разобрана полностью.

105. Установите бегунком на шкале S: 8,5°; 11,5°; 16°30′; 42°30′; 24°20′; 13°50′; 7°25′; 21°20′; 21°40′; 21°30′; 37°50′; 51°40′.

106. Установите 11°24′; 15°5′.

107. Прочтите отмеченные чёрточками углы (в градусах и минутах) на рис. 64.

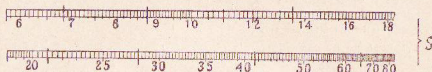


Рис. 64.

● *Если вы хорошо разобрали шкалу **S**, вам будет легко усвоить строение шкал **S&T** и **T**, а вместе с тем и выполнять все тригонометрические вычисления. Знание шкал — основа счёта на линейке.*

Шкала *S&T*

Шкала ***S&T*** проще шкалы ***S***. Она построена почти в точности так же, как шкалы ***C*** и ***D***. Рассмотрим её на рис. VI (на вклейке между стр. 70 и 71). Самые крупные деления, идущие через всю шкалу — г р а д у с н ы е. Эти деления отмечены цифрами *1*, *2*, . . ., *5* (шкала ***S&T*** охватывает промежуток от 0°34,38′ до 5°44′ — до того места, с которого начинается шкала ***S***).

108. Найдите градусные деления на линейке.

Каждый градус по всей шкале ***S&T*** разделён на 6 частей штрихами, отмечающими д е с я т к и м и н у т. Штрихи эти во всех участках шкалы (см. рис. V на вклейке между стр. 34 и 35) далеко выходят за горизонтальные линии шкалы (дальше, чем все другие в данном участке); кроме того, некоторые из них отмечены цифрами: деления, соответствующие 0°40′ и 0°50′, и чёрточки, отделяющие половины градусов: 1°30′ и 2°30′;. . .; 5°30′.

109. Найдите эти деления на линейке.

110. Установите на шкале ***S&T***: 1°20′; 3°40′; 4°; 4°30′; 5°; 5°30′; 5°40′; 1°50′.

Десятки минут разделены на более мелкие деления, но эти деления уже не одинаковы: в первом участке (от начала до 1°) деления идут через п о л м и н у т ы (каждый десяток разделён на д в а д ц а т ь ч а с т е й)[1], во втором участке (от 1 до 3°) деления идут через о д н у м и н у т у (каждый десяток разделен на 10 частей), в третьем участке (от 3 до 5°) — через д в е м и н у т ы (десяток разделён на 5 частей) и, наконец, в четвертом (от 5° до конца) — через п я т ь м и н у т (деление на 2 части)[2].

---

[1]) На некоторых линейках эти деления идут через одну минуту.

[2]) Полезно сравнить эти деления с делениями I, II и III сорта на шкалах ***C*** и ***D*** (см. стр. 19 и рис. II на вклейке между стр. 14 и 15).

111. Отыщите эти деления на линейке. Рассмотрите пятые деления среди делений I сорта. Чем они отличаются?

112. Установите на шкале *S* & *T*: 1°27′; 2°13′; 2°19′; 3°6′; 4°31′; 5°5′; 5°23′; 2°51′30″.

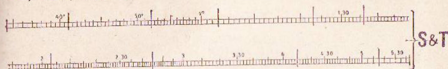


Рис. 65.

113. Прочтите отмеченные углы на шкале *S* & *T* на рис. 65.

● *В случае недоразумения со шкалами S или S & T нужно обращаться к рис.* V.

Шкала *T*

Эта шкала (от 5°44′ до 45°) — самая простая из всех тригонометрических шкал. Она разделена на градусы и на их шестые части (десятки минут), и, кроме того, в левой половине шкалы (до 20°) каждая шестая часть разделена ещё пополам (пять минут). Если мы внимательно рассмотрим её, то легко в ней разберёмся.

114. Найдите градусные деления на шкале *T*. Против каких из них стоят цифры, против каких цифр нет?

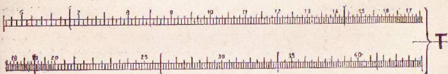


Рис. 66.

115. Установите на шкале *T*: 14°; 28°; 33°; 44°; 45°; 7°30′; 10°40′; 21°50′; 9°35′; 6°23′; 27°35′; 36°23′.

116. Прочитайте отмеченные углы на шкале *T* (см. рис. 66).

Как найти синус и тангенс данного угла и, обратно, как по синусу или тангенсу найти угол

§ 37. Как уже было сказано (см. стр. 69), все тригонометрические шкалы связаны со шкалой *D*. Но, прежде чем переходить к подробному разбору этой связи, нужно отметить следующее обстоятельство: на шкалах счётной линейки можно, как мы уже говорили, устанавливать л ю б ы е ч и с л а, причём каждый штрих шкалы *D* изображает не одно какое-нибудь определённое число (например, 2,43), а все числа, получаемые из него умножением на любую степень десяти (и 0,243, и 24,3, и 0,0243, и т. д.). Совсем иначе обстоит дело, когда

шкала *D* используется для отыскания синусов и тангенсов углов, нанесённых на шкалах *S*, *T* или *S & T*. В этом случае шкалу *D* приходится рассматривать как охватывающую уже вполне определённый интервал и каждой её чёрточке ставить в соответствие только одно число, так как ясно, что на вопрос, каков, например, sin 35°, может быть только один ответ.

Шкалы *S* и *T* нанесены на линейке с тем расчётом, что на шкале *D* находятся числа от 0,1 до 1,0. И так как

$$\left.\begin{array}{l}\sin 5°43{,}77' = 0{,}0998 \approx 0{,}100\\ \mathrm{tg}\, 5°43{,}77' = 0{,}1003 \approx 0{,}100\end{array}\right\}\text{(в пределах точности линейки)},$$
$$\sin 90° \quad = 1{,}000,$$
$$\mathrm{tg}\, 45° \quad = 1{,}000,$$

то получается, что шкала *S* охватывает углы с 5°43,77′ до 90°, а шкала *T* — углы с 5°43,77′ до 45°.

Шкала *S & T* является как бы продолжением обеих шкал (*S* и *T*) влево. Так как уже при 5°43,77′ значения синуса и тангенса в пределах точности линейки совпадают, то ясно, что и при меньших углах они будут совпадать. Этим и объясняется, что для продолжения двух шкал (*S* и *T*) употреблена только одна шкала *S & T*. Сопоставляя шкалу *D* с этой шкалой, мы должны считать, следовательно, правую единицу шкалы *D* (её правый конец) за 0,1, а левый, в таком случае, очевидно, за 0,01 (в десять раз меньше). Шкала *S & T* как раз и начинается с 0°34,38′, так как

$$\left.\begin{array}{l}\sin 0°34{,}38' = 0{,}0099998\\ \mathrm{tg}\, 0°34{,}38' = 0{,}0100003\end{array}\right\}\approx 0{,}010000.$$

Чтобы лучше разобраться в этом, рассмотрим рис. 67. На нём шкала *S & T* сдвинута влево относительно шкал *S* и *T*, и под ней начерчен соответствующий отрезок шкалы *D* (от 0,01 до 0,1); на

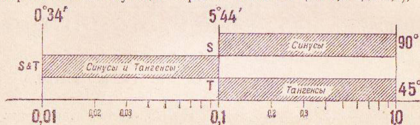


Рис. 67.

самом деле на линейке, как известно, все три шкалы расположены одна под другой, и разница между ними (по отношению к шкале *D*) сказывается только в том, что, применяя шкалу *D* параллельно с *S* или *T*, мы должны считать её идущей от 0,1 до 1; применяя же её

одновременно с S & T — от 0,01 до 0,1. Теперь без всякого труда можно отыскивать синусы и тангенсы заданных углов. Всё дело сводится к тому, чтобы, установив на одной из трёх тригонометрических шкал данный угол посредством визирной линии бегунка, прочесть на шкале D величину синуса или тангенса, отмеченную той же визирной линией.

Пример 1. Найти sin 40°.

Бегунок ставят против 40° на шкале S. На шкале D читают (рис. 68): шесть — четыре — три.

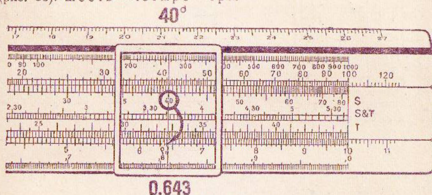


Рис. 68.

Помня то, что было только что сказано о величине чисел шкалы D, получают:

$$\sin 40° = 0{,}643.$$

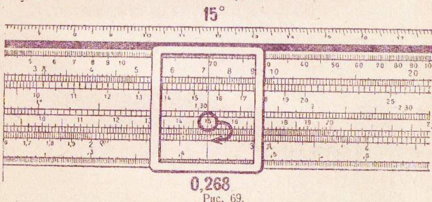


Рис. 69.

Пример 2. Найти tg 15°.

Бегунок ставят на 15° шкалы T. На шкале D читают (рис. 69): два — шесть — восемь:

$$\operatorname{tg} 15° = 0{,}268.$$

Пример 3. Найти $\sin 3°$.

Так как $3°$ меньше $5°43,77'$, мы ставим $3°$ на шкале $S \& T$. На шкале D читаем (рис. 70): пять — два — три.

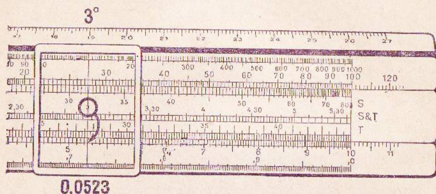


Рис. 70.

Помня, что для шкалы $S \& T$ числа шкалы D идут от 0,01 до 0,10, получаем:

$$\sin 3° = 0{,}0523 = \operatorname{tg} 3°.$$

117. Найти $\sin 36°$; $\sin 42°30'$; $\sin 16°15'$; $\operatorname{tg} 17°50'$.

118. Найти $\operatorname{tg} 8°37'$; $\sin 5°51'$; $\operatorname{tg} 26°18'$; $\sin 2°37'$; $\operatorname{tg} 1°12{,}6'$.

119. Сообразите, как искать $\cos \alpha$.

Указание. $\cos(90° - \alpha) = ?$

120. Найти $\cos 73°30'$; $\cos 46°30'$; $\cos 23°$.

121. Найти x, если:

$\operatorname{tg} x = 0{,}264,$	$\operatorname{tg} x = 0{,}1965,$
$\sin x = 0{,}67,$	$\cos x = 0{,}312,$
$\sin x = 0{,}136,$	$\sin x = 0{,}0263.$

122. Вычислить $\operatorname{arctg} 0{,}3$; $\operatorname{arctg} 0{,}96$; $\arcsin 0{,}165$; $\arcsin 0{,}0355$; $\operatorname{arctg} 0{,}0725$; $\arccos 0{,}01575$.

Указание. Если $\operatorname{arctg} x = y$, то $x = \operatorname{tg} y$.

Примечание. Во всех случаях вычисления обратных круговых функций требуется найти их наименьшие положительные значения.

● *Внимательно следите, в особенности при вычислении обратных круговых функций, за тем, когда нужно пользоваться шкалой* $S \& T$.

● *И помните*

ПРАВИЛО О СИНУСАХ И ТАНГЕНСАХ

> Синусы и тангенсы углов шкалы *S & T* заключены между одной сотой и одной десятой.
> Синусы и тангенсы углов шкалы *S* и шкалы *T* заключены между одной десятой и единицей.

Действия с тригонометрическими величинами

§ 38. Пример 1. Вычислить $2 \cdot \operatorname{tg} 15°$.

Для решения задачи можно, конечно, зная, что $\operatorname{tg} 15° = 0{,}268$ (см. пример 2 § 37), вынуть движок, вставить его лицевой стороной в линейку и обычным образом получить на шкалах *S* и *D* произведение $2 \cdot 0{,}268 = 0{,}536$. Но можно сделать гораздо проще. Не переворачивая движка на лицевую сторону, сдвинуть его вправо так, чтобы начало шкалы *T* пришлось как раз над цифрой 2 шкалы *D*. Тогда против 15° шкалы *T* на шкале *D* будет ответ: 0,536 (рис. 71). Почему это так, — ясно. Когда движок стоял у нас

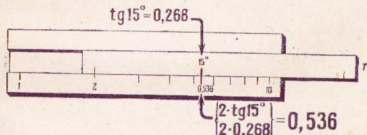


Рис. 71.

в таком положении, что начала шкалы *T* и шкалы *D* совпадали, то 15° на шкале *T* приходились как раз против числа 0,268 на шкале *D*, т. е., другими словами, отрезок шкалы *T* от начала до 15° в точности равен отрезку шкалы *D* (или, что то же, шкалы *C*) от начала до 0,268. А раз так, то совершенно безразлично, какой употребить штрих для получения произведения: штрих ли «15°» шкалы *T* или штрих «0,268» шкалы *C*.

123. Проделайте этот же пример на линейке. Затем вычислите $1{,}6 \cdot \operatorname{tg} 11°30'$; $2{,}42 \cdot \operatorname{tg} 21°15'$.

124. Вычислить $5{,}65 \cdot \operatorname{tg} 36°$.

В последней задаче надо найти сначала, чему равен $\operatorname{tg} 36°$, затем обычным способом найти произведение и после этого, сравнив это

вычисление с вычислением, проделанным в приведённом выше примере, сообразить, как найти произведение, не переворачивая движка лицевой стороной.

● *Для того чтобы легко и свободно обращаться со шкалами тригонометрических величин, можно представлять их себе так: шкалы* **S, T, S & T**, *это — та же самая шкала* **C**, *которую мы постоянно употребляли для умножения, но с названиями чисел, как бы переведёнными на иностранные языки: язык синусов или тангенсов. Например, по-обычному мы читали на шкале* **C**: *д в а — ш е с т ь — в о с е м ь, а на шкале* **T** *тот же самый штрих мы называем на языке тангенсов так: т а н г е н с п я т н а д ц а т и г р а д у с о в. Но от этого наш способ обращения со штрихами не меняется; если нам нужно вычислить выражение:* $2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$, *то это не составляет для нас затруднений: мы пользуемся для получения произведения, как и всегда, шкалами* **D** *и* **C**, *но так как второй множитель нам назван на языке тангенсов* ($\operatorname{tg} 15^\circ$), *то, чтобы избежать предварительного перевода этого названия на обычный язык, мы берём вместо шкалы* **C** *её перевод на язык тангенсов, т. е. шкалу* **T**, *и на ней сразу находим тот штрих, который нам назван.*

При всех вычислениях с тригонометрическими величинами сохраняются, конечно, в полной силе правила о порядке произведения и частного (см. стр. 27 и 30). Чтобы легко их применять, заметим, что

> Порядок чисел[1]) шкалы *S* и шкалы *T* равен н у л ю.
> Порядок чисел шкалы *S & T* равен м и н у с е д и н и ц е.

П р и м е р 2.

$$\frac{60{,}5}{\operatorname{tg} 38^\circ 20'} = ?$$

Чтобы разделить 60,5 на $\operatorname{tg} 38^\circ 20'$, поступают так, как если бы шкала **T** была шкалой **C**, т. е. ставят $38^\circ 20'$ на шкале **T** против 60,5 на шкале **D**. Против конца шкалы **T** (единицы, так как $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$) читают на шкале **D** (рис. 72):

с е м ь — ш е с т ь — п я т ь.

Порядок 60,5 — д в а, порядок tg — н у л ь, движок пошёл в л е в о, значит, порядок частного: $2 - 0 = 2$.

О т в е т:

$$\frac{60{,}5}{\operatorname{tg} 38^\circ 20'} = 76{,}5.$$

[1]) Под числами шкал *S*, *T* и *S & T* понимаются величины соответствующих синусов и тангенсов.

Пример 3. Найти $A = 1{,}46 \cdot \sin 56'30''$.

Так как $56'30'' < 5°43'$, то нам придётся употреблять шкалу ***S* & *T***.

Для умножения ставим её начало против 1,46 шкалы ***D*** (рис. 73) и против 56'30'' читаем на шкале ***D***: два — четыре.

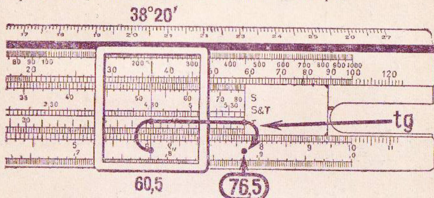


Рис. 72.

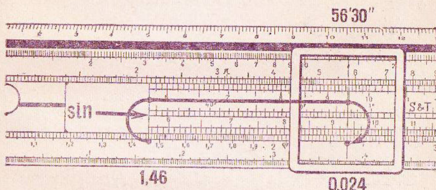


Рис. 73.

Порядок 1,46 — один, порядок sin — минус один (шкала *S* & *T*!), движок пошёл вправо; порядок произведения:

$$[1 + (-1)] - 1 = -1.$$

Ответ: $A = 0{,}024$.

125. Вычислить $S = 5{,}75 \cdot \sin 26°$; $t = \frac{1{,}23}{\operatorname{tg} 20°}$;

$$T = \frac{4}{\sin 3°}; \; a = 20{,}5 \cdot \operatorname{tg} 36°20'.$$

126. В прямоугольном треугольнике (рис. 74) дано:

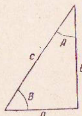


Рис. 74.

$a = 15,3$ *см*;	$A = 23°5$;	$b = ?$
$a = 7,61$ »	$B = 36°20'$;	$b = ?$
$a = 10$ »	$A = 32°$;	$b = ?$
$c = 32,5$ »	$A = 16°40'$;	$a = ?$
$c = 26,8$ »	$A = 86°53'$;	$b = ?$
$a = 0,082$;	$A = 2°35'$;	$c = ?$
$a = 2,62$;	$B = 65°$;	$c = ?$

127. На протяжении 200 *м* по горизонтали (рис. 75) дорога опускается под углом 1°30′ к горизонту. На какую глубину h опустится полотно дороги в конце спуска?

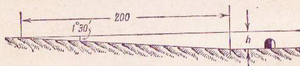


Рис. 75.

128. Найти ctg 30°.

Указание. $\operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°}$.

● *Полезно заметить решение задачи* **128.** *Этим способом мы можем искать котангенсы, хотя дальше мы познакомимся и с другими приёмами нахождения котангенсов.*

129. Найти ctg 40°, ctg 27°40′, ctg 6°15′, ctg 2°37′.

130. В каких пределах заключены котангенсы углов, находящихся на шкале *T*?

131. Найти tg 72°.

Указание. $\operatorname{tg} 72° = \operatorname{ctg}(90° - 72°) = \operatorname{ctg} 18°$.

● *Заметьте решение задачи* **131.**

132. Найти tg и ctg таких углов: 50°30′; 56°; 61°10′; 82°15′; 86°11′.

§ 39. В тех случаях, когда приходится вычислять выражения, в которые входит произведение или частное синусов и тангенсов, можно, конечно, применять все те приёмы, которые были указаны в § 21 (комбинированные действия).

Пример. Вычислить $\eta = \frac{0,65 \cdot \mathrm{tg}\, 22^\circ}{\mathrm{tg}\, 24^\circ}$.

Выражение это можно вычислять так, как вычисляются выражения вида $\frac{a \cdot b}{c}$ (см. § 17). Прежде всего делят 0,65 на tg 24° (т. е. устанавливают 24° шкалы *T* против 0,65 на шкале *D*, рис. 76) и

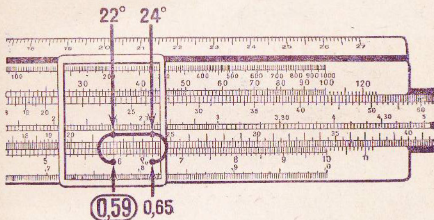


Рис. 76.

читают ответ на шкале *D* против 22° шкалы *T* (это, как уже известно по вычислению выражений вида $\frac{a \cdot b}{c}$, эквивалентно умножению полученного частного $\frac{0,65}{\mathrm{tg}\, 24^\circ}$ на tg 22°). Читают: пять — девять.

Ответ: $\eta = 0,59$.

Порядок η, очевидно, нуль, так как порядок 0,65 — нуль, порядок тангенсов тоже нуль, и, по правилу, порядок $\eta = 0 + 0 - 0 = 0$.

133. Вычислить:

$$\frac{0,6 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 22^\circ}; \quad 1,4 \cdot \sin 12^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 10^\circ 30';$$
$$\frac{4,85 \cdot \sin 26^\circ}{\mathrm{tg}\, 39^\circ 40'}; \quad \frac{106 \cdot \mathrm{tg}\, 2^\circ 40'}{\mathrm{tg}\, 13^\circ 40'}.$$

134. Найти

$$A = \sin 15^\circ \cdot \sin 20^\circ;$$
$$\delta = \frac{\sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 40'}{\mathrm{tg}\, 10^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 20^\circ}.$$

135. Коэффициент полезного действия червячной передачи (рис. 77) вычисляется по формуле:

$$\eta_s = \frac{0{,}9 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta + \rho)},$$

где β — угол подъёма червяка, а ρ — угол трения. Вычислить η_s для $\beta = 4°$ и $\rho = 6°$.

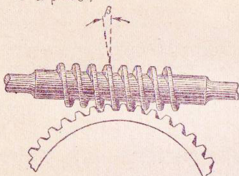


Рис. 77.

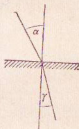


Рис. 78.

136. Каков показатель преломления стекла μ относительно воздуха, если угол падения луча α равен 35°, а угол преломления $\gamma = 21°$ (рис. 78)?

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

§ 40. При тригонометрических вычислениях очень полезно применять всё то, что было сказано о пропорциях для обыкновенных вычислений (стр. 34, § 18). В частности, особенно полезно помнить правило о равенстве всех «дробей», образованных стоящими друг против друга числами шкал C и D (стр. 34). Так как мы уже знаем, что, применяя шкалы S, T или $S \& T$, мы пользуемся той же шкалой C, только переведённой на другой язык, то легко будет сообразить, какие следствия отсюда вытекают для этих шкал S, T и $S \& T$.

Установив, например, движок так, как это сделано на рис. VII (см. вклейку между стр. 70 и 71), мы получаем, что

$$\frac{\operatorname{tg} 5°43{,}77'}{1{,}46} = \frac{\operatorname{tg} 6°55'}{1{,}77} = \frac{\operatorname{tg} 9°25'}{2{,}42} = \frac{\operatorname{tg} 15°15'}{3{,}98} = \frac{\operatorname{tg} 21°20'}{5{,}70} = \frac{\operatorname{tg} 30°30'}{8{,}60} = \frac{\operatorname{tg} 34°25'}{10}.$$

Или ещё, так как $\operatorname{tg} 5°43{,}77' = 0{,}1$, можно написать, что общая величина всех этих отношений есть:

$$\frac{0{,}1}{1{,}46} = \frac{1}{14{,}6},$$

137. Сделайте такую установку, как на рис. VII (вклейка между стр. 70 и 71), у себя на линейке и проверьте, правильно ли записаны отношения. Сравните с рис. III.

● *Заметьте, что*

а) Когда мы писали аналогичные равенства отношений для шкал C и D, мы могли брать в числителях дробей числа разных порядков, следя лишь за тем, чтобы во всех «дробях» разность порядков числителя и знаменателя была постоянной. Теперь у нас все числители одного и того же порядка (порядок тангенса на шкале T — нуль); поэтому мы и в знаменателях обязаны писать числа одного и того же порядка. Можно, например, писать:

$$\frac{\operatorname{tg} 6°55'}{17{,}7} = \frac{\operatorname{tg} 9°25'}{24{,}2} = \ldots,$$

но писать

$$\frac{\operatorname{tg} 6°55'}{17{,}7} = \frac{\operatorname{tg} 9°25'}{2{,}42} = \ldots$$

нельзя. При этом надо, однако, помнить об исключении, указанном на стр. 30 *и касающемся отношения вида* $\frac{a}{1}$, *когда в знаменателе стоит правая единица (правый конец) шкалы D. Так, например, в написанных выше отношениях*

$$\frac{\operatorname{tg} 5°43{,}77'}{1{,}46} = \frac{\operatorname{tg} 6°55'}{1{,}77} = \frac{\operatorname{tg} 9°25'}{2{,}42} = \ldots = \frac{\operatorname{tg} 34°25'}{10}$$

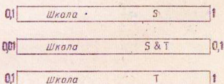


Рис. 79.

все знаменатели одного и того же порядка, кроме последнего. Исключение это не создаёт, однако, больших затруднений, так как всегда легко сообразить, какое число должно стоять в том или другом отношении, сравнивая его с соседними.

б) Особенно часто приходится пользоваться первым и последним отношениями из написанного выше ряда, т. е. отношениями типа:

$$\frac{0{,}1}{a};\ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1};\ \frac{1}{a}.$$

Чтобы с удобством применять правила о пропорциях к тригонометрическим шкалам, нужно помнить, что (рис. 79)

начало шкал	*S и T*	*соответствует*	0,1,
конец »	*S и T*	»	1,
начало шкалы	*S & T*	»	0,01,
конец »	*S & T*	»	0,1.

Пример 1. Найти угол x, зная, что

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 19^\circ 30'}=\frac{3}{5}.$$

Пользуясь пропорцией, мы моментально решим эту задачу. Очевидно, что

$$\frac{\operatorname{tg} x}{3}=\frac{\operatorname{tg} 19^\circ 30'}{5}.$$

Поэтому устанавливаем $19^\circ 30'$ шкалы T против 5 на шкале D. Тогда против 3 на шкале D окажется искомый угол на шкале T (рис. 80). В данном случае $x=12^\circ$.

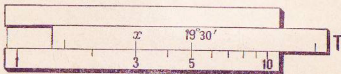


Рис. 80.

138. Найти x из равенств, приводя их к виду пропорций:

а) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 26^\circ}=\frac{1{,}7}{2{,}4}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 9^\circ 20'}{\operatorname{tg} x}=\frac{1{,}09}{3{,}26}$;

в) $\frac{\sin x}{\sin 42^\circ}=\frac{3}{8}$; г) $8\cdot\operatorname{tg} x=2{,}24\cdot\operatorname{tg} 31^\circ$;

д) $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 27^\circ}=\frac{2}{7}$.

139. Найти $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$; $\operatorname{arctg}\frac{14}{15}$; $\arcsin\frac{3}{5}$.

Указание. Если $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}=x$, то это значит, что $\operatorname{tg} x=\frac{3}{7}$. А это можно написать в виде:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1}=\frac{3}{7},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 45^\circ}=\frac{3}{7}.$$

● *Заметьте, что во всех задачах, которые мы сейчас решали, было выполнено требование о том, что порядки знаменателей в дробях*

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a_1}=\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{a_2}=\dots$$

должны быть одинаковыми.

Как быть в том случае, когда это не так,— мы сейчас увидим.

Рассмотрим рис. 81. Если мы поставим движок в такое же положение, в какое он поставлен на рис. VII (начало тригонометрических шкал против чёрточки «1,46» шкалы D), но вместо шкалы T

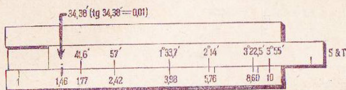


Рис. 81.

возьмём шкалу S & T, то, очевидно, на точно таких же основаниях, как и для шкалы T, сможем написать ряд равенств [1]):

$$\frac{0{,}01}{1{,}46}=\frac{\operatorname{tg} 41{,}6'}{1{,}77}=\frac{\operatorname{tg} 57'}{2{,}42}=\frac{\operatorname{tg} 1°33{,}7'}{3{,}98}=\frac{\operatorname{tg} 2°14'}{5{,}70}=\frac{\operatorname{tg} 3°22{,}5'}{8{,}60}=\frac{\operatorname{tg} 3°55'}{10}.$$

Но

$$\frac{0{,}01}{1{,}46}=\frac{0{,}1}{1{,}46}\cdot\frac{1}{10}=\frac{0{,}1}{14{,}6},$$

и, таким образом, мы можем приравнять все отношения, полученные для шкалы S & T, и все отношения, полученные для шкалы T, если увеличим знаменатели последних в 10 раз.

В самом деле, очевидно, что

$$\frac{\operatorname{tg} 6°55'}{17{,}7}=\frac{\operatorname{tg} 9°25'}{24{,}2}=\frac{\operatorname{tg} 15°15'}{39{,}8}=\ldots=\frac{\operatorname{tg} 34°25'}{100}=\frac{0{,}1}{14{,}6}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} 41{,}6'}{1{,}77}=\frac{\operatorname{tg} 57'}{2{,}42}=\frac{\operatorname{tg} 1°33{,}7'}{3{,}98}=\ldots=\frac{\operatorname{tg} 3°55'}{10}=\frac{0{,}1}{14{,}6}.$$

Вывод из этого такой:

Если в пропорциях

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a_1}=\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{a_2}=\ldots=\frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{a_k}$$

знаменатели не все одного порядка, а двух различных, отличающихся на единицу, то углы, соответствующие бо́льшим знаменателям, будут находиться против них на шкале T, а соответствующие меньшим знаменателям — на шкале S&T

[1]) $\operatorname{tg} 34{,}38' = 0{,}01$.

Примечание I. Очевидно, аналогичное правило будет справедливо для шкалы S и S & T в применении к пропорциям:

$$\frac{\sin\alpha_1}{a_1}=\frac{\sin\alpha_2}{a_2}=\ldots=\frac{\sin\alpha_k}{a_k}.$$

Примечание II. Если по смыслу задачи большим знаменателям уже соответствуют углы шкалы S & T, то, очевидно, правило это применять нельзя. Например, пропорцию

$$\frac{\sin x}{3}=\frac{\sin 3^\circ}{70}$$

установить на линейке, пользуясь этим правилом, невозможно.

Примечание III. Надо иметь в виду исключение, связанное с правой единицей шкалы D.

Чтобы легко запомнить это основное правило, заметим, что на шкале S & T помещаются маленькие углы, а на шкале S (или T) — сравнительно большие. Тогда правило можно сформулировать так:

● *Большим углам отвечают большие знаменатели, маленьким — маленькие.*

Пример 2. Зная, что

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{3{,}6}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_3}{17{,}1}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_4}{8{,}5}=\frac{\operatorname{tg}20^\circ}{50},$$

найти углы α_1, α_2, α_3, α_4.

Решение. Согласно правилу о знаменателях угол α_3 будет на шкале T, остальные углы — на шкале S & T. Установив 20° шкалы

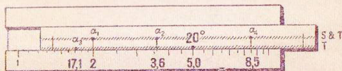


Рис. 82.

T против 5 шкалы D, получим (рис. 82):

$$\alpha_1=50';\ \alpha_2=1^\circ30';\ \alpha_3=7^\circ5{,}5';\ \alpha_4=3^\circ32{,}5'.$$

Пример 3. Найти x из уравнения: $5\sin 3^\circ=0{,}7\sin x$.

Решение. Переписываем данное уравнение так:

$$\frac{\sin 3^\circ}{0{,}7}=\frac{\sin x}{5}.$$

Так как порядок знаменателя у $\sin x$ больше на единицу, чем у знаменателя $\sin 3^\circ$, то x ищем на шкале S, установив 3° шкалы S & T против 7 шкалы D. Против 5 шкалы D находим на шкале S отметку 21°56'.

Ответ: $x=21^\circ56'$.

Пример 4. $\operatorname{arctg}\frac{12}{214}=?$

Решение. Если $x=\operatorname{arctg}\frac{12}{214}$, то $\operatorname{tg} x=\frac{12}{214}$ или $\frac{\operatorname{tg} x}{12}=\frac{1}{214}$.

Порядок 214 равен 3, порядок 12 равен 2; $1=\operatorname{tg} 45°$ находится на шкале *T*; значит, *x* будем искать на шкале *S & T*. Установив конец шкалы *T* против 214 шкалы *D*, читаем на шкале *S & T* против 12 шкалы *D*: $x=3°12{,}6'$.

Ответ: $3°12{,}6'$.

● *Заметим, однако, что иногда разница в порядках знаменателей может быть уничтожена. Вот пример:*

Пример 5. $\operatorname{arctg}\frac{25}{109}=?$

Рассуждая так же, как в примере 4, мы приходим к равенству:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{25}=\frac{1}{109},$$

но, если теперь мы захотим, установив конец шкалы *T* против 109, прочесть, чему равен *x* на шкале *S & T*, то это нам не удастся: штрих 25 шкалы *D* будет за пределами шкалы *S & T*. Для получения ответа придётся употреблять начальный штрих шкалы *T*, т. е. устанавливать такую пропорцию:

$$\operatorname{tg} x=\frac{25}{109}; \quad \frac{\operatorname{tg} x}{25}=\frac{0{,}1}{10{,}9}.$$

А теперь мы видим, что знаменатели — одного порядка, и потому *x* найдётся на шкале *T* против 25 шкалы *D*, если начало шкалы *T* поставить против 10,9. Мы получим $x=12°55'$.

Ответ: $12°55'$.

Замечание. То обстоятельство, что ответ получится на шкале *T*, можно было предвидеть заранее: $\frac{25}{109}>0{,}1=\frac{10{,}9}{109}$, а, как мы знаем, углы, тангенсы которых больше 0,1 и меньше 1, помещаются на шкале *T*.

140. Проделайте все эти примеры на линейке.

141. Найдите углы β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 из уравнений:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{0{,}024}=\frac{\operatorname{tg}\beta_2}{0{,}036}=\frac{\operatorname{tg}\beta_3}{0{,}057}=\frac{\operatorname{tg}\beta_4}{0{,}123}=\frac{\operatorname{tg}\beta_5}{0{,}163}=\frac{\operatorname{tg}\beta_6}{0{,}240}=\frac{\operatorname{tg} 22°}{0{,}326}.$$

142. Вычислить $x_1, x_2, \ldots, x_5$, если

$$\frac{\sin 50°}{3}=\frac{\sin x_1}{2}=\sin x_2=\frac{\sin x_3}{0{,}5}=\frac{\sin x_4}{0{,}3}=\frac{\sin x_5}{0{,}1}.$$

143. Вычислить $a_1, a_2, \ldots, a_5$, если

$$\frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{218}=\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{a_1}=\frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{a_2}=\frac{\operatorname{tg} 7^\circ}{a_3}=\frac{\operatorname{tg} 5^\circ}{a_4}=\frac{\operatorname{tg} 2^\circ}{a_5}.$$

144. Найти x из уравнения:

$$25{,}6 \operatorname{tg} 5^\circ = 8{,}1 \sin x.$$

145. Найти $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

Указание. Так как $\frac{5}{3}>1$, то искомый $\operatorname{arctg}>45^\circ$ и не уместится на шкале T; однако его можно найти, имея в виду, что если

$$x=\operatorname{arctg}\frac{5}{3}, \quad \operatorname{tg} x=\frac{5}{3},$$

то

$$\operatorname{ctg} x=\frac{3}{5}=\operatorname{tg}(90^\circ-x).$$

Поэтому сначала можно найти $(90^\circ-x)$, а затем уже и x.

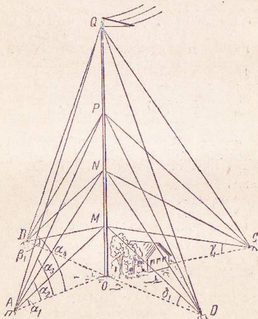


Рис. 83.

146. Радиомачта в 45 *м* высоты удерживается канатами (рис. 83). Найти угол α_4, образуемый канатом AQ, закреплённым в точке A, в 25 *м* расстояния от основания O мачты.

147. В косоугольном треугольнике (рис. 84) дано:

$a = 26{,}3$ *см*;	$B = 36°$;	$C = 71°$;	найти b, c, A.
$a = 17{,}1$ *см*;	$B = 45°$;	$C = 60°$;	» b, c, A.
$a = 0{,}296$;	$B = 15°$;	$C = 26°$;	» b, c, A.
$a = 106$;	$B = 5°$;	$C = 10°$;	» b, c, A.

Указание. Воспользуйтесь свойством $A + B + C = 180°$ и теоремой синусов (ср. задачу **142**), помня, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

148. В косоугольном треугольнике дано:

$a = 116{,}5$;	$A = 35°$;	$B = 110°$;	найти b, c, C.
$a = 0{,}7$;	$A = 53°$;	$B = 63°$;	» b, c, C.
$a = 29{,}7$;	$A = 126°$;	$B = 31°$;	» b, c, C.
$a = 0{,}61$;	$A = 2°30'$;	$B = 3°30'$;	» b, c, C.

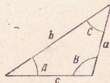


Рис. 84.

● *Прежде чем решать следующую задачу, нужно вспомнить из тригонометрии случай решения треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. В этой задаче надо исследовать, имеется ли два решения, одно решение или ни одного.*

149. В косоугольном треугольнике (рис. 84) дано:

$a = 90$;	$b = 212$;	$A = 20°$;	найти B, C, c.
$a = 4{,}27$;	$b = 9{,}45$;	$A = 12°$;	» B, C, c.
$a = 18{,}3$;	$b = 53{,}5$;	$A = 20°$;	» B, C, c.
$a = 0{,}06$;	$b = 0{,}15$;	$A = 25°$;	» B, C, c.

Как узнать, не делая специального исследования, а только по тем ответам, которые даёт линейка, имеет ли данная задача два, одно или ни одного решения?

Обратите внимание на то, чему равна сумма углов треугольника в том случае, когда задача не имеет решения. Придумайте сами примеры всех трёх типов.

§ 41. Точно так же, как мы перевёртывали движок для обыкновенных вычислений (см. стр. 53), можно его перевёртывать и для тригонометрических вычислений. Здесь, как и там, это даст большой выигрыш в случаях вычислений с величинами, обратно пропорциональными синусам или тангенсам, деления одного и того же числа на ряд синусов или тангенсов и т. п.

Итак, вынем движок из линейки и вставим его обратно так, чтобы тригонометрические шкалы остались снаружи, но в перевёрнутом виде, т. е. верхняя шкала заняла место нижней, и наоборот. Вдвинем его притом в линейку так, чтобы начало шкал движка совпало с концом шкал линейки. Теперь шкала T у нас будет самой верхней, а шкала S — самой нижней. Мы уже знаем, что при перевёрнутом

движке шкала C даёт обратные величины чисел шкалы D (см. стр. 57), или, что то же самое, шкала D даёт обратные величины чисел шкалы C. Теперь у нас имеются заменяющие шкалу C шкалы S, T и S & T. Ясно, что шкала D будет давать обратные величины синусов или тангенсов углов, помещённых на этих шкалах.

Пример 1. Против 30° перевёрнутой шкалы S на шкале D стоит два. Это значит, что

$$\frac{1}{\sin 30^\circ} = \csc 30^\circ = 2;$$

так как синусы на шкале S заключены между 0,1 и 1, то их обратные величины заключены между 10 и 1.

150. Найти $\csc 42^\circ$, $\csc 21^\circ 30'$, $\csc 15^\circ 6'$, $\csc 7^\circ 15'$.

151. Найти $\mathrm{sc}\, 67^\circ$, $\mathrm{sc} 80^\circ$, $\mathrm{sc}\, 82^\circ 30'$.

Указание. $\csc(90^\circ - \alpha) = \mathrm{sc}\ \alpha$.

152. Найти $\csc 5^\circ 5'$, $\csc 1^\circ 30'$, $\mathrm{sc}\, 86^\circ 20'$.

Примечание. Обратить внимание на порядок!

153. Найти $\mathrm{ctg}\, 40^\circ$, $\mathrm{ctg}\, 27^\circ 40'$, $\mathrm{ctg}\, 6^\circ 15'$, $\mathrm{ctg}\, 2^\circ 37'$. Сравнить с задачей **129.**

154. Найти $\mathrm{tg}\, 83^\circ$, $\mathrm{tg}\, 62^\circ$, $\mathrm{tg}\, 56^\circ$, $\mathrm{tg}\, 70^\circ 35'$.

Указание. $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\, \alpha$.

● *Мы видим, что перевёрнутая шкала T даёт продолжение обычной шкалы T за 45°, только цифры перевёрнутой шкалы T надо читать не так, как они написаны, а вычитая их из 90°.*

Пример 2. Значения l обратно пропорциональны $\sin\alpha$; при $\alpha = 41^\circ$ значение $l = 1{,}8$. Найти l для $\alpha = 35^\circ$, 26°, 17°, 8°. Для каких α значения l будут равны 2,0; 2,5; 3,0; 5,0?

Решение. Устанавливают перевёрнутый движок так, что 41° шкалы S приходится против 1,8 шкалы D (рис. 85). Тогда против данных α читают на шкале D значения l:

α	35°	26°	17°	8°
l	2,06	2,69	4,03	8,48

а против данных l на шкале S искомые α:

l	2,0	2,5	3,0	5,0
α	36°10′	28°10′	23°10′	13°39′

Что касается порядков, — ср. стр. 61.

155. Вычислить $y = \frac{0,162}{\operatorname{tg} x}$ для $x = 10°$, $15°$, $20°$, $25°$, $30°$, $35°$, $40°$ и $45°$.

156. Тросы AM, BM, CM и DM, поддерживающие радиомачту (см. рис. 83), образуют с поверхностью земли углы $\alpha_1 = 21°$,

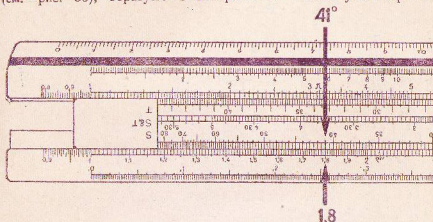


Рис. 85.

$\beta_1 = 23°30'$, $\gamma_1 = 15°40'$ и $\delta_1 = 18°$. Расстояние $AO = 25$ *м*. Найти расстояния BO, CO, DO.

Вычисления с тригонометрическими величинами без перевёртывания движка обратной стороной

§ 42. До сих пор мы делали все тригонометрические вычисления с движком, вставленным обратной стороной наружу. Однако бывают случаи, когда это неудобно.

Если во время длинного расчёта с обыкновенными числами нам нужно найти только один раз какой-нибудь синус или тангенс, то вытаскивать и переставлять движок для этого слишком долго.

Чтобы обойти это маленькое неудобство, на линейке сделано особое приспособление. Возьмём линейку с движком в *обычном* положении и перевернём её так, как показано на рис. 86. На её задней стороне мы увидим два выреза: пониже середины — слева — и повыше середины — справа. В этих вырезах мы найдём уже знакомые нам шкалы: в правом — S и $S\&T$, в левом — T (шкала $S\&T$ в нём тоже видна, но на ней нельзя делать отсчётов) (рис. 87). На внутренней стороне этих вырезов против каждой из указанных шкал нанесены чёрточки для отсчётов, которые мы будем обозначать так же, как соответствующие им шкалы S, T, $S\&T$ (рис. 86).

Если мы установим движок так, чтобы на лицевой стороне совпадали начальные штрихи шкал движка и линейки, то и штрихи в выре-

зах придутся как раз против начального штриха шкалы *T* и конечных штрихов шкал *S & T*. Чтобы сообразить, как при помощи этих штрихов делаются отсчёты, нужно заметить, что шкалы *S*, *T* и *S & T*

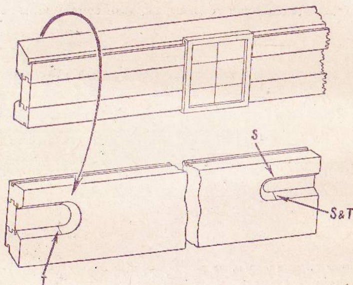


Рис. 86.

соответствуют шкале *C*. Шкала *C* нанесена на лицевой стороне движка, тригонометрические шкалы — на оборотной. На всех шкалах движка (и на *C* и на тригонометрических) начала и концы с о в п а д а ю т

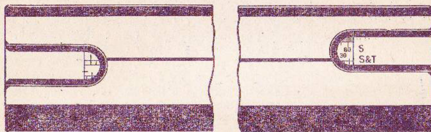


Рис. 87.

(убедиться в этом можно, вынув движок и рассмотрев его). Но в таком случае ясно, что когда мы выдвигаем движок (например, направо), т о к о н е ц ш к а л ы *D* и с о о т в е т с т в у ю щ и й ш т р и х в п р а в о м в ы р е з е (например *S*) о т м е ч а ю т о д н о в р е м е н н о н а

шкале *C* и на шкале *S* *одно и то же место* (см. рис. 88, на нём изображены одновременно и передняя и задняя стороны линейки).



Рис. 88.

Иначе говоря, вот какое имеется

ПРАВИЛО ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СИНУСОВ ПРИ ПОМОЩИ ВЫРЕЗА В ЛИНЕЙКЕ

Конец шкалы ***D*** указывает на шкале ***C*** величину синуса угла, отмечаемого штрихом *S* на шкале ***S***.

Совершенно аналогичное правило будет справедливо для шкалы ***S & T*** и штриха *S & T*.

157. Составьте это правило, проверьте его (найдя при его помощи sin 3° и сверив ответ с решением примера 3 в § 37, стр. 76), аккуратно запишите здесь:

ПРАВИЛО ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СИНУСОВ И ТАНГЕНСОВ МАЛЫХ УГЛОВ ПРИ ПОМОЩИ ВЫРЕЗА В ЛИНЕЙКЕ

Для отыскания тангенсов углов, бо́льших 5°43′, нужно использовать шкалу ***T***. Единственное отличие от описанных уже приёмов будет здесь заключаться в том, что движок придётся двигать *влево* (так как вырез находится слева) и величину тангенса будет указывать на шкале ***C*** соответственно этому не конец, а *начало* шкалы ***D***.

158. Составьте соответствующее правило и, проверив его (ср. пример 2 в § 37, стр. 75), запишите:

ПРАВИЛО ОТЫСКАНИЯ ТАНГЕНСОВ ПРИ ПОМОЩИ ВЫРЕЗА В ЛИНЕЙКЕ

Все правила о порядке и величине синусов и тангенсов сохраняются при этом способе.

159. Если мы выдвинем движок влево, то начало шкалы D отмечает на шкале C тангенс угла, стоящего против чёрточки T. Докажите, что конец шкалы C отмечает на шкале D котангенс того же угла.

Указание. Используйте возможность представления пропорций на шкалах C и D (ср. стр. 34).

160. Что даёт начало шкалы C на шкале D в случае выдвигания движка вправо?

161. Найти $\arcsin\frac{3}{5}$ при помощи выреза S.

Указание. Задача будет решена, если мы получим величину отношения $\frac{3}{5}$ на шкале C над концом шкалы D. Достигнуть этого можно, опять-таки составляя пропорции.

XVII. ПЕРЕВОД ГРАДУСОВ В РАДИАНЫ И ОБРАТНО. ТАНГЕНСЫ И СИНУСЫ УГЛОВ, МЕНЬШИХ 34′

Значки ρ°, ρ', ρ''

§ 43. На большинстве линеек на шкале *C* или *D* (а иногда и на обеих сразу) нанесены значки:

$$\rho^\circ = \frac{360}{2\pi} = 57{,}30 \text{ (точнее, } 57{,}29578),$$

$$\rho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3438 \text{ (точнее, } 3437{,}747),$$

$$\rho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 206\,265 \text{ (точнее, } 206264{,}8).$$

Все эти числа дают величину радиана (ρ) в градусах (ρ°), минутах (ρ') и секундах (ρ'').

На некоторых линейках нанесён ещё значок $\rho_{\prime\prime}$, дающий величину радиана в метрической угловой мере — в сотых долях «сантиграда». (В метрической системе угловых мер прямой угол делится на 100 градов и каждый град на 100 сантиградов, так что

$$\rho_{\prime\prime} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2\pi} = 636\,620.)$$

Употреблять его почти не приходится, так как метрическая система угловых мер пока не получила широкого распространения.

Как употреблять значки ρ°, ρ', ρ'' — ясно.

Пример 1. Перевести 0,6 радиана в градусы.

Решение. Очевидно, градусная мера угла в 0,6 радиана равна $0{,}6\rho^\circ$. Умножаем 0,6 на ρ°, получаем: три — четыре — четыре. Порядок ρ° — два, порядок 0,6 — нуль. Движок пошёл влево. Порядок произведения — два.

Ответ: 0,6 радиана $= 34{,}4^\circ = 34^\circ 24'$.

162. Перевести этот же угол (0,6 радиана) в минуты и секунды.

● *Порядок* ρ° *— два,* ρ' *— четыре,* ρ'' *— шесть.*

163. Перевести в минуты 0,02; 0,175; 1,06; 0,831.
164. Перевести в секунды 0,003; 0,001365; 0,52.
165. В конце прошлого века был предложен фантастический проект подземной самокатной дороги, соединяющей по прямой линии Москву с Ленинградом (рис. 89). Под каким углом уходила бы дорога в землю в Москве и в Ленинграде? Радиус земного шара $6{,}37 \cdot 10^6$ *м*, расстояние между Москвой и Ленинградом 650 *км* $= 6{,}5 \cdot 10^5$ *м* (по поверхности земли).

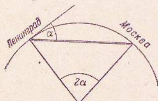


Рис. 89.

Перевод градусных мер в радианные также не представляет затруднений.

Пример 2. Перевести в радианы 18°20′32″.

Решение. $18^{\circ} = \frac{18}{\rho^{\circ}}$ радианов $= 0{,}3141$ (порядок $\rho^{\circ} = +2$),

$20' = \frac{20}{\rho'}$ » $= 0{,}0058/2$ (порядок $\rho' = +4$),

$32'' = \frac{32}{\rho''}$ » $= 0{,}0001/55$ (порядок $\rho'' = +6$),

$0{,}3201$ [1]).

Ответ: $18^{\circ}20'32'' = 0{,}3201$ радиана.

● *Из этого примера видно, что при вычислении на линейке давать секунды для углов уже в 18° (а для бóльших и подавно) бесполезно. Это будет за пределами точности линейки.*

166. Перевести в радианы 57°36′; 24°19′; 10°35′.
167. Перевести в радианы 2°40′36″; 57′36″; 2′27,3″.
168. Вычислить площадь кругового сектора радиуса 1,6 *м* и с центральным углом в 8°36′.

● *На некоторых линейках значка* ρ° *нет. В этом случае можно или запомнить его значение:*

$$\boxed{\rho^{\circ} = 57{,}3}$$

[1]) Лишние цифры в выражениях минут и секунд отброшены ввиду того, что следующая цифра в выражении градусов неизвестна, и, следовательно, писать цифры дальше четвёртой — напрасный труд.

или пользоваться вместо ρ° *дробью:*

$$\frac{180}{\pi},$$

исходя из того, что

$$\rho^\circ = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}.$$

Пример 3. Перевести в радианы 16°.

Решение. Вычисляем $\frac{16 \cdot \pi}{180}$ вместо $\frac{16}{\rho^\circ}$. (Вычислéние делается одной установкой движка по типу выражений $\frac{a \cdot b}{c}$.) Получаем два — семь — девять — четыре. Порядок 16 — два, порядок π — один, порядок 180 — три. Порядок результата $2+1-3=0$.

Ответ: $16^\circ = 0{,}2794$ радиана.

Синусы и тангенсы углов, меньших 34'

§ 44. До сих пор мы рассматривали тригонометрические функции углов, бóльших 34,38'.

169. Переведите в радианы 34,38'. Получив ответ, посмотрите, скольким минутам равно ρ' (см. § 43, стр. 95).

Нам уже известно (см. стр. 74), что 34,38' — это тот угол, с которого начинается шкала ***S*** & ***T***. Для этого угла мы имеем:

$$\sin 34{,}38' = \operatorname{tg} 34{,}38' = 0{,}01.$$

Решая задачу **169**, мы только что нашли, что

$$34{,}38' = 0{,}01 \text{ радиана.}$$

Вывод отсюда такой:

Для угла в 34,38' величина синуса и тангенса уже оказывается равной величине самого угла (в радианах). То же самое будет и для углов, меньших 34,38'.

Таким образом:

● *Для углов, не превосходящих 34,38', синусы и тангенсы вычисляются, исходя из соотношения:*

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha,$$

где α *— угол, выраженный в радианах.*

170. Найти sin 3'32"; tg 26'21"; cos 89°42'31"; ctg 89°30'.

Указание. Сравните задачи **128, 129, 131, 132.**

171. Горизонтальным параллаксом $\pi_{\odot}$ Солнца называется угол, образованный прямыми, соединяющими центр Солнца S с центром

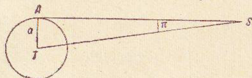


Рис. 90.

Земли T и с точкой A на поверхности земли, причём угол TAS — прямой (см. рис. 90).

Наблюдениями найдено, что

$$\pi_{\odot} = 8{,}80''.$$

Найти расстояние TS Земли от Солнца, если a (радиус Земли) = = 6370 *км.*

● *Чтобы легче запомнить, как переводят радианы в градусы и обратно, заметим, что:*

а) для этих целей на линейке есть значки

$$\rho^{\circ},\ \rho',\ \rho''$$

(эти значки — числа именованные: градусы, минуты, секунды);

б) радианы — числа отвлечённые;

в) переводя радианы в градусы (или в минуты, или в секунды), мы из отвлечённого числа делаем именованное и потому должны множить на ρ° (или ρ', ρ'');

г) переводя градусы в радианы, мы, наоборот, уничтожаем наименование: получаем отвлечённое число; значит, здесь надо делить на ρ° (или ρ', ρ'').

XVIII. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Квадратные уравнения

§ 45. Для решения квадратного уравнения на счётной линейке его надо привести к особому виду. Вот как это делается.

Дано уравнение:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Делим его на a:

$$x^2+px+q=0 \quad \left(p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a}\right).$$

Это уравнение делим[1]) на x:

$$x+p+\frac{q}{x}=0.$$

Переносим p направо:

$$x+\frac{q}{x}=r \qquad (r=-p). \qquad (1)$$

Преобразование закончено. Сба числа q и r могут быть как положительными, так и отрицательными.

Преобразованное к виду (1) уравнение будем называть уравнением в нормальном виде.

Пример. Привести к нормальному виду уравнение:

$$2x^2+7x-5=0.$$

Решение. 1) $2x^2+7x-5=0$.
2) $x^2+3{,}5x-2{,}5=0$.
3) $x+3{,}5-\frac{2{,}5}{x}=0$.
4) $x-\frac{2{,}5}{x}=-3{,}5$.

Ответ:

$$x-\frac{2{,}5}{x}=-3{,}5.$$

[1]) Предполагается, что $x \neq 0$; иначе было бы
$q=0$ и $x^2+px=0$, или $x(x+p)=0$, $x_1=0$, $x_2=-p$
и решать было бы нечего.

172. Привести к нормальному виду уравнения:

$$0{,}2x^2 - 3{,}1x + 1{,}7 = 0;\ 3{,}25x^2 + 6{,}01x + 9{,}62 = 0;$$
$$1{,}415x^2 - 2{,}90x - 1{,}66 = 0.$$

§ 46. Решение на линейке уравнения, приведённого к нормальному виду, заключается просто в подборе такого числа x, которое, будучи сложено (в алгебраическом смысле) с $\frac{q}{x}$, даёт r. Выполняется этот подбор просто при помощи перевёрнутого движка или обратной шкалы.

173. Переверните движок и установите его конец (или начало) против q на шкале D. Какое число будет стоять на перевёрнутой шкале C против x на шкале D? Возьмите, например, $q = 8$, $x = 2$; 4; 5. Сравните стр. 57 и рис. 57.

Мы видим, что при такой установке, которая описана в задаче **173**, числа x и $\frac{q}{x}$ оказываются стоящими непосредственно друг против друга: одно — на шкале D, другое — на перевёрнутой шкале C (или на обратной шкале R при обычном положении движка). Поэтому, если, намечая визирной линией бегунка стоящие друг против друга числа на этих шкалах, мы найдём такую пару, которая, будучи алгебраически сложена, даст r, то наше уравнение решено.

Число x на шкале D — искомый корень.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^2 - 3{,}80x + 2{,}97 = 0$.

Прежде всего приводим это уравнение к нормальному виду:

$$x + \frac{2{,}97}{x} = 3{,}80.$$

Устанавливаем начало перевёрнутого движка против 2,97 на шкале D (рис. 91). Начинаем подбирать x. Для этого заметим прежде всего, что пара (2,97; 1), которая соответствует началу движка, даёт сумму 3,97, т. е. б о л ь ш е, чем нужно. Попробуем пойти влево по шкале D. При $x = 2$ находим на шкале C против него число 1,485, в качестве суммы получаем $2 + 1{,}485 = 3{,}485$, т. е. м е н ь ш е, чем надо. Ясно, что, взяв $x = 2$, мы уже перескочили через нужное значение,— приходится идти назад. Пара (2,5; 1,19) даёт сумму 3,69,— м а л о; пара (2,6; 1,14) даёт сумму 3,74,— м а л о; пара (2,7; 1,10) даёт сумму 3,80,— как раз то, что нужно. Итак, $x = 2{,}70$ — корень данного уравнения. Но одновременно мы нашли и второй корень. Он равен 1,10 — как раз тому числу шкалы C, которое стоит против 2,70. В самом деле:

$$1{,}10 = \frac{2{,}97}{2{,}70}.$$

Но тогда

$$2{,}70 = \frac{2{,}97}{1{,}10}$$

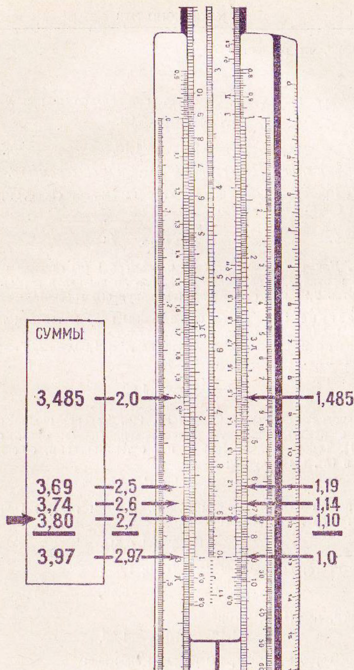


Рис. 91.

и очевидно, что равенство

$$x+\frac{2{,}97}{x}=3{,}80,$$

справедливое при $x=2{,}70$, будет справедливо и при $x=1{,}10$:

$$1{,}10+2{,}70=3{,}80.$$

Но тогда

$$x_1=2{,}70;\; x_2=1{,}10.$$

Заметьте, что оба корня мы получаем одновременно.

174. Проверьте найденное решение каким-либо способом, например, по известной формуле:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

175. Для решения уравнения в примере 1 мы ставили начало движка против 2,97 на шкале *D*. Могли ли мы найти корень, поставив против 2,97 конец движка (выдвинув его вправо)?

Указание. Посмотрите, какие суммы получаются для тех пар, которые мы находим при такой установке.

Пример 2. Найти корни уравнения $x^2+1{,}60x-2{,}97=0$.

Решение. Нормальный вид:

$$x-\frac{2{,}97}{x}=-1{,}60. \qquad (A)$$

Установка движка прежняя (рис. 92). Теперь, подбирая пары, нам уже нужно учитывать знак корней. Начнём опять с пары (2,97; 1). Теперь, складывая 2,97 и 1 с теми знаками, с какими они входят в (А), мы получим:

$$+2{,}97-1=+1{,}97,$$

т. е. много больше, чем нам нужно. Пойдём налево. При $x=2$ получим пару (2; 1,485) с суммой:

$$+2-1{,}485=+0{,}515$$

всё ещё много; дальше для пары (1,50; 1,98):

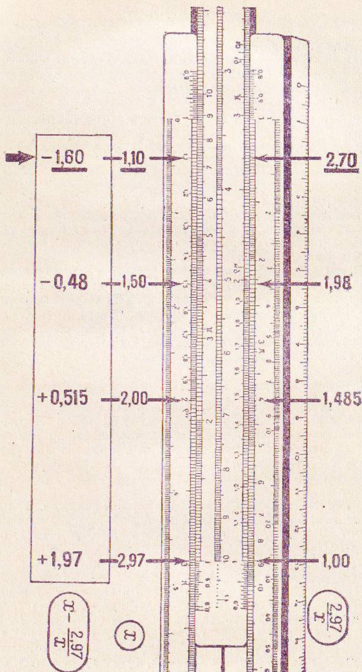
$$+1{,}50-1{,}98=-0{,}48,$$

и, наконец, для (1,10; 2,70):

$$+1{,}10-2{,}70=-1{,}60. \qquad (B)$$

Таким образом, для x_1 мы находим значение:

$$x_1=1{,}10.$$



−1,60
1,10
2,70
−0,48
1,50
1,98
+0,515
2,00
1,485
+1,97
2,97
1,00
$x-\frac{2,97}{x}$
x
$\frac{2,97}{x}$

Рис. 92.

Каково же теперь x_2?

Ответ на это нам даёт опять шкала C. Там мы читаем против $x_1=1{,}10$ число 2,70. Значит:

$$2{,}70=\frac{2{,}97}{1{,}10}.$$

Но теперь (в отличие от примера 1) слагаемые в (В) разных знаков, и потому, беря $x_2=2{,}70$, мы цели не достигнем $(+2{,}70-1{,}10=+1{,}60)$, зато, взяв $x_2=-2{,}70$, получим как раз то, что нужно:

$$(-2{,}70)-\left(-\frac{2{,}97}{2{,}70}\right)=-1{,}60.$$

Итак, $x_1=1{,}10$; $x_2=-2{,}70$.

Разумеется, мы могли бы отыскать x_2 и без этих соображений путём поисков в область отрицательных значений x и таких же проб, как раньше (нетрудно убедиться, что другого корня среди положительных x быть не может).

Итак, мы видим, что весь процесс решения сводится к подыскиванию корня путём проб. Вначале кажется, что эти пробы требуют так много времени и внимания, что проще решать уравнения по обыкновенным правилам, известным из алгебры; однако это не так,— уже после небольшой практики вы увидите, что решение на линейке — дело очень простое, и почти моментально будете находить искомый корень. Нижеследующие соображения вам в этом помогут.

Отыскание интервала, в котором заключён корень уравнения

§ 47. Для того чтобы быстро решить квадратное уравнение при помощи линейки, нужно знать п р и м е р н у ю в е л и ч и н у корня (например — равен ли он нескольким десяткам или нескольким сотым, или нескольким единицам). А так как по виду уравнения составить себе представление о величине его корней не так легко, то прежде всего мы будем искать промежуток, в котором корень заключается.

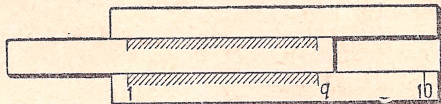
Мы уже знаем (из самого начала этой книжки, стр. 12), что шкала D линейки может изображать любой из промежутков: от 1 до 10, от 10 до 100, от 100 до 1000 и т. д.; от 0,1 до 1, от 0,01 до 0,1, от 0,001 до 0,01 и т. д.

Определить, в каких из этих промежутков находятся искомые корни, и является нашей первой задачей.

Пусть наше уравнение уже приведено к нормальному виду, и мы установили перевёрнутый движок так, как нужно, т. е. так, что его начало (или конец) приходится против числа q на шкале D. Исследование промежутков мы для удобства начнём с того из них, в который попадает число q. Если, например, $q=0{,}045$, то, очевидно, промежуток, изображаемый шкалой D, будет простираться от 0,01 до 0,1 (так как $0{,}01<0{,}045<0{,}1$).

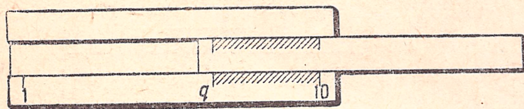
176. Каким промежуткам будет соответствовать шкала D при $q=0,69$; $0,00105$; 4; $10,5$; $3,06$?

При исследовании вопроса о том, имеется ли в этом промежутке корень уравнения или нет, нам придётся разбить промежуток на *две части*: 1) от начала до числа q и 2) от числа q до конца. Это приходится делать вот почему: допустим, мы установили *начало* перевёрнутого движка против числа q (движок выдвинут влево). Тогда мы можем искать корень только *налево* от числа q, т. е. в той части промежутка, которая простирается от начала его до q. Направо от q поисков производить мы не можем, потому что там *нет движка* (и нужной нам перевёрнутой шкалы C) (черт. 93).



Черт. 93

Чтобы получить возможность искать корень направо от q, нам придётся перебросить движок на правую сторону, установив его *конец* против числа q (черт. 94).



Черт. 94

Итак, проведём исследование для левой части шкалы D, взяв для простоты конкретный пример: уравнение $x^2-12,65x+0,63=0$, или (в нормальном виде) $x+\frac{0,63}{x}=12,65$. В этом случае $q=0,63$; значит, левая часть шкалы D будет содержать числа от 0,1 до 0,63. Может ли быть в этом промежутке корень? Если бы он там был, то это значило бы, что для какого-то числа x из этого промежутка мы получили бы: $x+\frac{0,63}{x}=12,65$, а это невозможно. На правом конце промежутка (при $x=0,63$) мы получаем (черт. 95, I):

$$0,63+\frac{0,63}{0,63}=0,63+1,0=1,63.$$

На левом конце (при $x=0,1$):

$$0,1+6,30=6,40.$$

Если же мы возьмём несколько значений x *внутри* промежутка, то увидим, что соответствующие им величины выражения $x+\frac{0,63}{x}$ будут заключены между 1,63 и 6,40. Но это как раз и значит, что в этом промежутке корня нет.

Мы видим, что можно судить о наличии корня внутри промежутка по тем значениям x, которые стоят на его концах. Это и является сущностью нашего способа отыскания промежутка, содержащего корень.

Итак, в промежутке (0,1; 0,63) корня нет. Перенесём наши поиски в другие промежутки. То же самое положение движка даёт нам возможность исследовать промежутки (0,01; 0,063), (0,001; 0,0063), (1; 6,3), (10; 63) и т. д. Обратимся к промежутку (0,01; 0,063) (рис. 95, II).

Правый конец этого промежутка даёт для выражения $x+\frac{0,63}{x}$ величину 10,063; в левом (при $x=0,01$) мы получаем 63,01. Эти

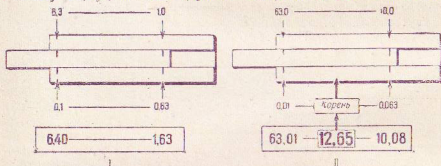


Рис. 95.

два числа позволяют предположить, что в рассматриваемом промежутке имеется корень.

В самом деле:

$$10{,}063 < 12{,}65 < 63{,}01,$$

и для какого-то промежуточного x можно получить:

$$x+\frac{0{,}63}{x}=12{,}65.$$

Действительно, для $x=0{,}05$ мы находим:

$$0{,}05+12{,}60=12{,}65.$$

Итак, $x_1=0{,}05$. Ясно, что второй корень $x_2=12{,}6$; однако для лучшего усвоения системы поисков будем считать, что он нам неизвестен, и продолжим исследование промежутков. Стоит ли исследовать промежутки для значений $x<0{,}01$? Ясно, что не стоит, так как уже для $x=0{,}01$ мы получили:

$$0{,}01+63{,}00=63{,}01;$$

для меньших x будут получаться числа ещё бо́льшие. Значит, нужно идти в сторону возрастания x.

177. Проведите исследование для промежутков (1; 6,3) и (10; 63). В каком из них может быть корень?

Все эти исследования были сделаны при одной установке движка (такой, как на рис. 93). Однако иногда может потребоваться и исследование с переброской движка в такое положение, как на рис. 94.

178. Исследуйте промежутки (0,063; 0,1), (6,3; 10).

179. Исследуйте промежуток (0,63; 1,0). Можем ли мы на основании исследования значений на концах этого промежутка сделать заключение об отсутствии или наличии в нём корня?

Промежуток такого сорта, как (0,63; 1,0) в задаче **179**, является исключительным промежутком. Таких промежутков для каждого уравнения может быть только два (а может и не быть вовсе). Промежутки эти (по концам которых нельзя судить о наличии или отсутствии внутри них корней) мы будем называть критическими. Для того чтобы исследовать критический промежуток, нам придётся не ограничиваться концами, а посмотреть, что делается внутри него,— перепробовать несколько значений x.

Признак критического промежутка для квадратного уравнения

Промежуток является критическим тогда, и только тогда, когда он содержит число $\sqrt{q}$.

Примечание I. *Если q — отрицательное число, то критического промежутка вовсе нет.*

Примечание II. *Если q — положительно, то критических промежутков — два (соответственно $+\sqrt{q}$ и $-\sqrt{q}$), но корни содержать может лишь один из них (какой,— ясно по знаку r).*

Имея этот признак критического промежутка, мы без труда сможем отыскивать промежутки, содержащие корни данного уравнения, применяя такие же приёмы, как в описанном выше случае.

Правило отыскания промежутка, содержащего корень

Для того чтобы узнать, содержит данный промежуток корень или нет, следует, в том случае, если этот промежуток некритический, вычислить величину выражения $S=x+\frac{q}{x}$ в левом и правом конце промежутка. Если одно из этих двух чисел $S_{лев}$ и $S_{прав}$ меньше, а другое больше r (правой части уравнения $x+\frac{q}{x}=r$), то промежуток содержит корень; если оба числа, и $S_{лев}$ и $S_{прав}$, одновременно меньше или больше r, то корня в нём нет.

Если же промежуток критический, то такого исследования мало; следует посмотреть, какова величина S при различных

значениях x внутри промежутка, и этим путём отыскать корень или убедиться в его отсутствии.

Примечание. *При $x=\sqrt{q}$ величина S достигает своего наибольшего или наименьшего значения.*

Доказательство положений, высказанных в этом правиле, не составляет никакого труда. Рассматривая левую часть уравнения $x+\frac{q}{x}-r=0$ как функцию x, мы находим, что она имеет максимум или минимум при $x=\sqrt{q}$, так как для $f(x)=x+\frac{q}{x}-r$ имеем $f'(x)=1-\frac{q}{x^2}$. Отсюда имеем критическое значение $x=\sqrt{q}$.

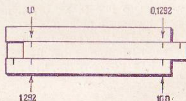


Рис. 96.

Но тогда во всех промежутках, не содержащих $\sqrt{q}$ («не критических»), $f(x)$ монотонно возрастает или убывает, откуда и следует правило [1]).

Пример. Решить уравнение $x^2+37,966x-1,292=0$. Приводя уравнение к нормальному виду, получаем:

$$x-\frac{1,292}{x}=-37,966.$$

В этом случае естественно поставить против 1,292 конец движка, выдвинув его вправо (рис. 96) (налево остаётся очень маленький кусочек шкалы D). Начинаем исследование. Прежде всего находим критический промежуток. Имеем $\sqrt{q}=1,137$. Значит, все промежутки, которые могут быть исследованы при такой установке, как на рис. 96 — некритические.

Начинаем с промежутка (1,292; 10). Значения S: $+0,292$ и $+9,8708$. Нужно идти в сторону уменьшения x, притом довольно далеко. Берём промежуток (0,01292; 0,1), пропуская (0,1292; 1,0).

Получаем:

$$S_{лев}\approx-99,9;\quad S_{прав}\approx-12,82;$$

так как

$$S_{лев}<-37,966<S_{прав},$$

[1]) Следует отметить ещё, что $x=0$ [точка разрыва $f(x)$] не попадает ни в один из промежутков, который может быть рассматриваем на линейке.

то в этом промежутке есть корень. Путём подбора находим:

$$x_1 = 0{,}034.$$

Абсолютная величина второго корня стоит на шкале C против x_1:

$$|x_2| = 38{,}000.$$

Сообразить, каков знак второго корня, нетрудно. Окончательно:

$$x_2 = -38{,}000.$$

Ответ:

$$x_1 = 0{,}034; \quad x_2 = -38{,}000.$$

● *Заметим, что при вычислении значений S не нужно подсчитывать их точно. Достаточно самого приблизительного подсчёта; поэтому отыскание промежутка с корнем — дело очень простое, и после небольшой практики вы будете делать эти поиски очень легко и быстро.*

● *Для вычисления значений S нам приходится подсчитывать величину дроби $\frac{q}{x}$; нужно помнить, что величины этих дробей стоят у нас на перевёрнутой шкале C, причём порядок их легко определить, исходя из значений x, которые мы берём на шкале D. В частности, при $x = q$ на шкале C оказывается единица; при $x = \frac{q}{10}$ на шкале C — десять; при $x = 10q$ на шкале C — нуль целых одна десятая и т. д.*

● *Очень большая выгода предварительного определения промежутка, содержащего корень, заключается в том, что при этой системе отпадает необходимость определения* п о р я д к а *корня; это делается автоматически. Между тем, порядок корня обычно — камень преткновения для начинающего вычислителя.*

Отыскание корня

§ 48. Когда промежуток, заключающий корень, определён, возникает вопрос о нахождении самого корня. Дать удобные правила для этой операции нельзя, да и большой нужды в этом нет. Уже в результате самой небольшой практики вырабатываются в этом деле чутьё и уменье почти моментально «схватить» корень. Поэтому единственно, что в данном случае можно посоветовать,— это побольше практиковаться. Вначале придётся делать довольно много проб такого рода, как в примерах 1 и 2 § 46; затем число проб будет постепенно сокращаться и отыскание корня сделается почти автоматическим.

Для того чтобы легче этому научиться, очень полезно приучить себя прослеживать величину суммы $x + \frac{q}{x}$, передвигая бегунок вдоль всей шкалы. Этот приём, который приходится применять в критических промежутках, очень помогает как уяснению общей схемы решения, так и исследованию отдельных уравнений.

180. Решить уравнения:

1) $x^2-9{,}61x+8{,}34=0$;	6) $0{,}017x^2+2{,}53x+85{,}7=0$;
2) $x^2-1{,}62x-3{,}41=0$;	7) $5{,}0x^2-5{,}1x+100{,}4=0$;
3) $x^2+1{,}73x-2{,}16=0$;	8) $7{,}2x^2-87{,}1x+139{,}6=0$;
4) $x^2+8{,}80x+15{,}52=0$;	9) $x^2+6{,}08x+9{,}24=0$;
5) $x^2+0{,}01525x-0{,}0000546=0$;	10) $x^2-6x-1{,}562=0$.

● *Для проверки решения удобнее всего пользоваться известными свойствами корней уравнения*

$$x^2+px+q=0,$$

а именно:

$$x_1x_2=q,$$
$$x_1+x_2=-p.$$

181. Если вы ещё не чувствуете достаточной уверенности при решении квадратных уравнений при помощи линейки, то полезно взять алгебраический задачник и перерешать оттуда столько задач, сколько потребуется для приобретения навыка.

182. Возьмите какое-нибудь уравнение, не имеющее действительных корней, например $x^2+1{,}8x+1{,}2=0$, и посмотрите, как это обстоятельство сказывается на результате тех операций, которые мы выполняем обычно при решении на линейке.

● *Если корни уравнения — комплексные, то его следует решать по обычной формуле.*

Кубические уравнения

§ 49. Если вы научились решать квадратные уравнения, то решение кубических никаких трудностей уже не представит; на линейке оно выполняется точно таким же способом, как и решение квадратных. Для простоты мы начнём не с полного кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, а с более простого вида: $x^3+px+q=0$.

Уравнение $x^3+px+q=0$

Если разделить уравнение

$$x^3+px+q=0$$

на x и перенести свободный член в правую часть, то оно примет нормальный вид кубического уравнения:

$$x^2+\frac{q}{x}=r \qquad (r=-p).$$

Если мы подобрали такое число x, что сумма x^2 и $\frac{q}{x}$ будет равна r, то это число и есть корень уравнения. Самый подбор осуществляется точно так же, как и для квадратного уравнения при помощи перевёрнутого движка, с той разницей, что теперь мы будем складывать число x^2, стоящее на шкале A, и $\frac{q}{x}$ (на перевёрнутой

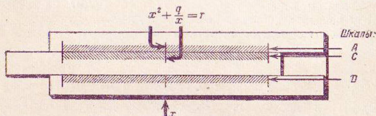


Рис. 97.

шкале C); оба они стоят против x на шкале D (рис. 97). Разумеется, при сложении необходимо учитывать и порядки и знаки слагаемых.

Всё сказанное при решении квадратных уравнений об отыскании промежутков, содержащих корень, остаётся в полной силе, кроме признака критического промежутка, который заменяется таким:

Признак критического промежутка кубического уравнения

Промежуток является критическим тогда, и только тогда, когда он содержит число $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Примечание. *Для каждого уравнения* $x^3+px+q=0$ *имеется один критический промежуток; при извлечении корня из числа* $\frac{q}{2}$ *нужно, конечно, иметь в виду знак* q.

Доказательство. Функция $f(x)=x^2+\frac{q}{x}-r$ достигает своего максимума или минимума при $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, так как $f'(x)=2x-\frac{q}{x^2}$ и уравнение $2x-\frac{q}{x^2}=0$ даёт $2x^3=q$ и $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

В соответствии с этим новым признаком критического промежутка изменяется и примечание к «Правилу отыскания промежутка, содержащего корень» (стр. 107); оно заменяется таким:

Выражение $S=x^2+\frac{q}{x}$ *достигает своего наибольшего или наименьшего значения при* $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Разобраться во всём этом будет легче на конкретном примере.

Пример. Решить уравнение $x^3 - 6{,}66x + 2{,}97 = 0$.

Решение. Приводя уравнение к нормальному виду, получаем:

$$x^2 + \frac{2{,}97}{x} = 6{,}66.$$

Устанавливаем перевёрнутый движок против 2,97 на шкале D (рис. 98) и начинаем исследование промежутков.

Прежде всего определяем критический промежуток

$$q = 2{,}97; \quad \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = 1{,}14.$$

Значит, критический промежуток идёт от 1 до 2,97; его в первую очередь мы и исследуем. Вычисляя значения $S = x^2 + \frac{q}{x}$ на концах этого промежутка, мы находим $S_{лев} = 3{,}97$ и $S_{прав} = 9{,}82$. Но так как промежуток критический, то вычислим ещё несколько S внутри него, чтобы вернее проследить его величину. При $x = 1{,}35$ получаем:

$$x^2 = 1{,}82; \ \frac{q}{x} = 2{,}20;$$
$$S = 1{,}82 + 2{,}20 = 4{,}02.$$

При $x = 2{,}02$ $S = 5{,}55$. Наконец, при $x = 2{,}32$ находим $S = 6{,}66$. Значит, $x = 2{,}32$ является корнем уравнения:

$$x_1 = 2{,}32.$$

Сейчас мы исследовали промежуток (1; 2,97); очень удобно теперь же исследовать соответствующий отрицательный промежуток[1]), т. е. промежуток (—1; —2,97).

На левом конце получаем (при $x = -1{,}0$):

$$S_{лев} = 1{,}00 - 2{,}97 = -1{,}97;$$

на правом (при $x = -2{,}97$):

$$S_{прав} = 8{,}82 - 1{,}00 = 7{,}82.$$

Так как $-1{,}97 < 6{,}66 < 7{,}82$ и промежуток некритический, то в нём есть корень.

После нескольких проб находим его:

$$x_2 = -2{,}78.$$

Переходим к дальнейшим поискам. В том же положении движка можно исследовать промежуток (0,1; 0,297). Однако это исследование

---

[1]) Потому что абсолютные величины x^2 и $\frac{q}{x}$ не меняются, и для получения S нужно только вычесть $\frac{q}{x}$ из x^2 (вместо сложения).

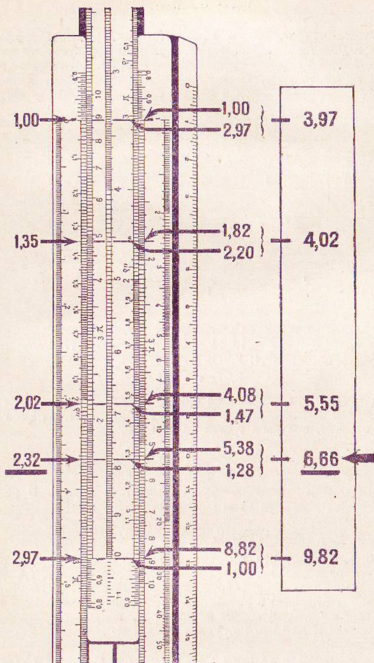
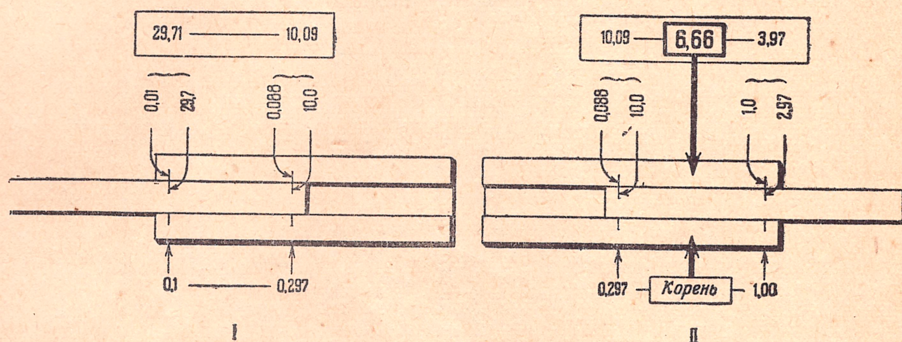

1,00
1,35
2,02
2,32
2,97
1,00
2,97
3,97
1,82
2,20
4,02
4,08
1,47
5,55
5,38
1,28
6,66
8,82
1,00
9,82

Рис. 98.

показывает, что корней в нём нет (черт. 99,I); $S_{лев}=29{,}71$; $S_{прав}=10{,}09$. Аналогичный отрицательный промежуток также не содержит корней ($S_{лев}=-29{,}69$; $S_{прав}=-9{,}91$). Итти дальше влево ни для положительных, ни для отрицательных значений x смысла нет. Перебрасываем движок в другое положение (выдвигая направо)



Черт. 99

и смотрим, что получается здесь. В проделанном уже исследовании мы вычисляли S при $x=1{,}0$ [$S_{лев}$ для промежутка (1; 2,97)] и при $x=0{,}297$ [$S_{прав}$ для (0,1; 2,97)]. Полученные нами значения были:

$$3{,}97 \quad \text{и} \quad 10{,}09.$$

Так как одно из них меньше 6,66, а другое больше, то мы уверенно можем искать корень в промежутке (0,297; 1,0) (черт. 99, II). Таким образом, получаем третий корень:

$$\underline{x_3=0{,}461}.$$

Ответ: $x_1=2{,}32$; $x_2=-2{,}78$; $x_3=0{,}461$.

Для проверки решения вычислим сумму всех корней. В результате должен получиться нуль[1]).

Действительно:

$$2{,}32+0{,}46-2{,}78=0.$$

§ 50. Мы видим, что решение уравнений вида $x^3+px+q=0$ нисколько не труднее решения квадратных уравнений. Требуется только немного больше работы, так как приходится искать три корня, притом каждый в отдельности (не так, как в квадратном уравнении, где, найдя один корень на шкале ***D***, получаем сразу и второй на шкале ***C***), но это не существенно.

---

[1]) Так как $(x_1+x_2+x_3)$ равно коэффициенту при x^2, взятому с обратным знаком. В уравнении $x^3+px+q=0$ этот коэффициент равен нулю.

Вот ещё несколько замечаний, которые помогут нам в этом деле.

● *Если мы нашли два корня кубического уравнения* x^3+px+ $+q=0$, *то третий мы можем найти из соотношений:*

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

или

$$x_1x_2x_3=-q,$$

т. е. взять

$$x_3=-(x_1+x_2),$$

или

$$x_3=-\frac{q}{x_1x_2}.$$

Формулы эти иногда дают корень с меньшей точностью, чем при получении его обычным процессом, но для определения приблизительной величины корня во всяком случае полезны. Они же могут служить для проверки решения.

● *В уравнении* $x^3+px+q=0$ *могут быть или три действительных корня (равных или неравных) или один действительный и два комплексных. Если нужно найти все три корня в последнем случае, то, найдя действительный корень уравнения* x_1, *делим* $x^3+px+q=0$ *на* $x-x_1$; *из получающегося в результате деления квадратного уравнения находим по формуле комплексные корни.*

● *В частном случае, когда* $p=0$, *мы, решая описанным приёмом уравнение* $x^3+q=0$, *находим* $\sqrt[3]{q}$. *Этим способом можно отыскивать кубические корни на тех линейках, на которых нет шкалы* **K** (ср. стр. 44).

183. Найти действительные корни уравнений:

1) $x^3-3{,}92x+6{,}05=0$;
2) $x^3-1{,}05x-3{,}75=0$;
3) $x^3-2x+1=0$;
4) $x^3+2{,}72x+1{,}55=0$;
5) $x^3+1{,}03x-10{,}3=0$;
6) $x^3-0{,}32x+0{,}015=0$;
7) $x^3+0{,}256x-1{,}455=0$;
8) $x^3+12{,}5x+2{,}61=0$.

Уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$

§ 51. Полное кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ приводится к форме $x^3+px+q=0$ так:

1) Делением на a его преобразуют в следующее:

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0\quad\left(A=\frac{b}{a};\ B=\frac{c}{a};\ C=\frac{d}{a}\right).$$

2) Обозначают $x+\frac{A}{3}$ через z и отыскивают сначала z. После этого находят $x=z-\frac{A}{3}$.

Чтобы найти z, поступают так: если подставить выражение $x=z-\frac{A}{3}$ в уравнение

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

то получится уравнение для определения z, причём оно будет *уже рассмотренного вида*:

$$z^3+pz+q=0.$$

В самом деле:

$$\left(z-\frac{A}{3}\right)^3+A\left(z-\frac{A}{3}\right)^2+B\left(z-\frac{A}{3}\right)+C=0.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$z^3-Az^2+\frac{A^2}{3}z-\frac{A^3}{27}+Az^2-\frac{2}{3}A^2z+\frac{A^3}{9}+Bz-\frac{AB}{3}+C=0,$$

$$z^3+\left(B-\frac{A^2}{3}\right)z+\left(\frac{2}{27}A^3-\frac{AB}{3}+C\right)=0,$$

$$z^3+pz+q=0\quad\left(p=B-\frac{A^2}{3};\quad q=\frac{2A^3}{27}-\frac{AB}{3}+C\right).$$

Вычислять коэффициенты p и q удобнее всего так:

Коэффициенты уравнения $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ пишутся в одну строчку:

1	A	B	C
	h	hA_1	hB_1
1	A_1	B_1	q
	h	hA_2	
1	A_2	p	

Схема 1.

Затем $h=-\frac{A}{3}$ умножается на первый коэффициент ($=1$) и подписывается под вторым коэффициентом (A); A и $h\cdot 1$ складываются, получается число A_1. Это число A_1 умножается на h и подписывается под третьим коэффициентом (B); B и hA_1 складываются, получается B_1. Умножая B_1 на h и складывая произведение с C, получают q. Затем такая же операция проделывается с числами

$$1,\ A_1,\ B_1,$$

и получается коэффициент p. Все умножения делаются на линейке при одной установке движка (движок ставится на h).

Вычисление располагается так, как на схеме 1. Чтобы легче запомнить порядок вычисления, рассмотрите ещё схему 2.

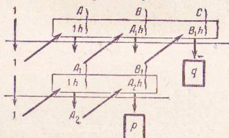


Схема 2.

184. Докажите, что при таком вычислении

$$p=B-\frac{A^2}{3};\quad q=\frac{2A^3}{27}-\frac{AB}{3}+C.$$

Пример 1. Преобразовать уравнение

$3{,}1x^3-10{,}7x^2+7{,}5x-12{,}3=0$ к виду: $z^3+pz+q=0$.

Решение. Делим уравнение на 3,1. Получаем:

$$x^3-3{,}45x^2+2{,}42x-3{,}97=0.$$

$$A=-3{,}45;\quad h=-\frac{A}{3}=1{,}15;\quad x=z+h=z+1{,}15.$$

Вычисляем по схеме:

$$\begin{array}{ll} & 1-3{,}45+2{,}42-3{,}97 \\ h=1{,}15 & \quad\ \ 1{,}15-2{,}65-0{,}26 \\ \hline & 1-2{,}30-0{,}23-\underline{4{,}23} \\ h=1{,}15 & \quad\ \ 1{,}15-1{,}32 \\ \hline & 1-1{,}15-\underline{1{,}55} \end{array}$$

Итак, $p=-1{,}55$; $q=-4{,}23$.
Уравнение переходит в такое:

$$z^3-1{,}55z-4{,}23=0;\quad x=z+1{,}15.$$

Ответ: $z^3-1{,}55z-4{,}23=0$; $x=z+1{,}15$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3+4{,}80x^2+1{,}02x-3{,}59=0$.

Решение. 1) $h=-\frac{4{,}80}{3}=-1{,}60$; $x=z+h=z-1{,}60$.

$$\begin{array}{ll} 2) & 1+4{,}80+1{,}02-3{,}59 \\ & \quad\ -1{,}60-5{,}12+6{,}56 \\ \hline & 1+3{,}20-4{,}10+\underline{2{,}97} \\ & \quad\ -1{,}60-2{,}56 \\ \hline & 1+1{,}60-\underline{6{,}66} \end{array}$$

Итак, уравнение переходит в такое:

$$z^3 - 6{,}66z + 2{,}97 = 0.$$

Но его мы уже решили (см. пример в § 49, стр. 112).

Имеем:

$$z_1 = 2{,}32,$$
$$z_2 = 0{,}461,$$
$$z_3 = -2{,}78.$$

Значит:

$$x_1 = z_1 + h = \quad 2{,}32 - 1{,}60 = \quad 0{,}72,$$
$$x_2 = z_2 + h = \quad 0{,}461 - 1{,}60 = -1{,}139,$$
$$x_3 = z_3 + h = -2{,}78 - 1{,}60 = -4{,}38.$$

Ответ: $x_1 = 0{,}72$; $x_2 = -1{,}139$; $x_3 = -4{,}38$.

Проверим наше решение. Для этого достаточно подставить в заданное уравнение найденный корень. Эту подстановку можно делать по схеме 1. Если мы возьмём вместо h найденный корень и проделаем те же операции, которые нужно выполнить, чтобы получить q, то в случае правильного решения у нас должен получиться нуль.

Вот проверка для корня 0,72:

$h = +0{,}72$	$+4{,}80$	$+1{,}02$	$-3{,}59$
	$0{,}72$	$+3{,}97$	$+3{,}59$
	$+5{,}52$	$+4{,}99$	$0{,}00$

Значит, корень найден верно.

185. Решить уравнения:

1) $x^3 - 2{,}9x^2 - 3{,}1x + 10{,}0 = 0$;
2) $0{,}685x^3 - 6{,}20x^2 + 14{,}05x - 7{,}50 = 0$;
3) $2{,}26x^3 + 7{,}01x^2 - 8{,}825x - 4{,}86 = 0$;
4) $1{,}21x^3 + 7{,}20x^2 + 7{,}20x - 8{,}54 = 0$;
5) $0{,}17x^3 - 0{,}531x^2 - 0{,}512x + 1{,}575 = 0$;
6) $4{,}85x^3 - 18{,}34x^2 + 28{,}72x - 17{,}46 = 0$.

XIX. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ В ПОЛЯРНЫЕ И ОБРАТНО

§ 52. Вычисление полярных координат точки по её декартовым координатам и обратно — декартовых по полярным — встречается на практике весьма часто. Поэтому полезно уметь пользоваться линейкой для решения этих задач.

Декартовы координаты (x, y) выражаются через полярные (r, φ) посредством формул:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Вычисление x и y по этим формулам никаких трудностей не представляет и выполняется способами, указанными в § 38. Единственное затруднение, с которым здесь иногда приходится сталкиваться,— это вычисление в случае φ, близкого к нулю или к 90°[1]).

Определить в первом случае $\cos\varphi$, а во втором случае $\sin\varphi$ на линейке затруднительно, и в этих случаях можно поступать так:

1) При φ, близком к 0°,— сначала найти $y = r\sin\varphi$, затем определить $x = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}$.

2) При φ, близком к 90°,— сначала найти $x = r\cos\varphi$, затем определить $y = x\operatorname{tg}\varphi = x\operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \frac{x}{\operatorname{tg}(90° - \varphi)}$.

Полярные координаты выражаются через декартовы менее удобными формулами:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Что касается первой из них (для вычисления φ), то вычисления такого рода были уже разобраны в § 37, и здесь можно сделать только несколько замечаний для упрощения вычислений.

Если p — меньшее из чисел $|x|$ и $|y|$, а q — большее, то прежде всего вычисляется угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{p}{q};$$

так как

$$\frac{p}{q} \leqslant 1, \quad \text{то} \quad \alpha \leqslant 45°.$$

---

[1]) Предполагается, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ приведены к первой четверти.

Когда найден угол α, то угол φ определяется по нему так:

	a) $\lvert x\rvert > \lvert y\rvert$,	b) $\lvert x\rvert < \lvert y\rvert$,
1-я четверть:	$\varphi=\alpha$	$\varphi=90^\circ-\alpha$
2-я »	$\varphi=180^\circ-\alpha$	$\varphi=90^\circ+\alpha$
3-я »	$\varphi=180^\circ+\alpha$	$\varphi=270^\circ-\alpha$
4-я »	$\varphi=360^\circ-\alpha$	$\varphi=270^\circ+\alpha$

Проверить эти формулы легко, учтя знаки и абсолютные величины x и y. Для вычисления r приходится применять формулу, неудобную тем, что в неё входит сложение. Вычисление r можно выполнять или способом, указанным в § 53, или при помощи такого приёма:

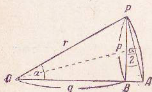


Рис. 100.

Если p и q имеют те же значения, что и выше, то, очевидно (рис. 100):

$$r=q+p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

(Так как треугольник OPA — равнобедренный, то, опустив из O высоту на сторону PA, мы получим треугольник, подобный PBA.)

Когда известно α, то r по этой формуле находится точнее и проще, чем по обычной формуле с корнем. Член $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ обычно много меньше первого члена; так как $q>p$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<\operatorname{tg}22^\circ30'=0{,}414$.

Пример. Вычислить полярные координаты точки $(-1{,}87;\ 5{,}65)$.

Решение. $x=-1{,}87$; $y=5{,}65$; $p=1{,}87$; $q=5{,}65$; 2-я четверть:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1{,}87}{5{,}65}=18^\circ18',\quad \frac{\alpha}{2}=9^\circ9' \qquad \varphi=90^\circ+18^\circ18'=108^\circ18'$$

$$p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0{,}3012,\quad q=5{,}65 \qquad r=5{,}65+0{,}3012=5{,}9512$$

Ответ:

$$r=5{,}9512;\quad \varphi=108^\circ18'.$$

186. Вычислить декартовы координаты точек:

$r=2{,}36$	7,92	6,05	1,316
$\varphi=36^\circ$	139°	182°30′	94°20′

187. Вычислить полярные координаты точек:

$x=1{,}32$	$-16{,}3$	$-5{,}72$	2,38
$y=3{,}97$	31,5	$-0{,}31$	$-1{,}69$

188. Преобразовать к виду $re^{i\varphi}$ комплексные числа:

$5+7i$; $-1{,}7+3{,}6i$; $-0{,}9-1{,}6i$; $-0{,}03-0{,}61i$.

XX. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

§ 53. Многие выражения, часто употребляемые в технических расчётах, получаются при помощи сложения и вычитания, например:

$$x=\sqrt{a^2+b^2},\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{u}\pm\frac{1}{b},\quad \sqrt{x}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b} \text{ и т. д.}$$

Когда приходится вычислять много одинаковых выражений такого рода, полезен особый приём, позволяющий выполнить все вычисления целиком, включая сложение и вычитание, на счётной линейке.

Чтобы легче разобраться в дальнейших примерах, рассмотрим сначала простейшее выражение этого рода:

$a+b$

Приём, употребляющийся для сложения на счётной линейке, заключается в замене сложения с числом b сложением с единицей. Установка на линейке изображена на рис. 101.

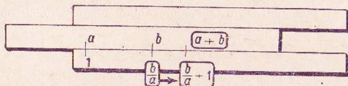


Рис. 101.

Применяя правило о пропорциях, имеем, очевидно:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{\frac{b}{a}}=\frac{x}{\frac{b}{a}+1};\quad \frac{x}{\frac{b}{a}+1}=a;\ x=a\left(\frac{b}{a}+1\right)=b+a=a+b.$$

Таким образом, для получения суммы $a+b$ устанавливаем одно слагаемое на шкале C против 1 шкалы D; против второго слагаемого на шкале C читаем промежуточный результат на шкале D; добавляем к нему единицу и против полученного числа на шкале D находим опять на шкале C сумму.

189. Как получается разность?

190. Проделать действия: $2+3$; $5+2$; $2{,}5+6{,}5$; $8+7$; $5-2$; $5{,}5-4{,}5$.

● *Конечно, употреблять линейку для простого сложения бессмысленно, но когда сложение входит в качестве промежуточного действия в формуле типа* $\sqrt{a^2+b^2}$, *это может оказаться выгодным.*

$\sqrt{a^2+b^2}$

При вычислении такого выражения приходится складывать квадраты. Поэтому схема сложения, данная для случая $a+b$, сохраняется с заменой шкалы D, служившей для промежуточных результатов, шкалой A (рис. 102).

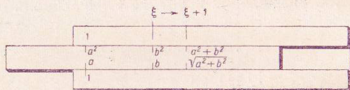


Рис. 102.

При этом окончательный результат ($\sqrt{a^2+b^2}$) получается так же, как и в случае простой суммы ($a+b$), опять на шкале C. Буква ξ на рис. 102 обозначает промежуточный результат $\left(\xi=\frac{b^2}{a^2}\right)$.

Пример. Вычислить $\sqrt{1{,}25^2+2^2}$.

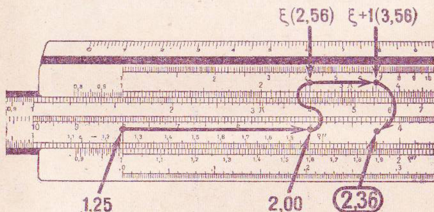


Рис. 103.

Ставим 1,25 шкалы C (рис. 103) против начала шкалы D и замечаем против двойки шкалы C число $\xi=2{,}56$ на шкале A. Тогда против $\xi+1=3{,}56$ на шкале A найдём на шкале C результат: $\sqrt{1{,}25^2+2^2}=2{,}36$.

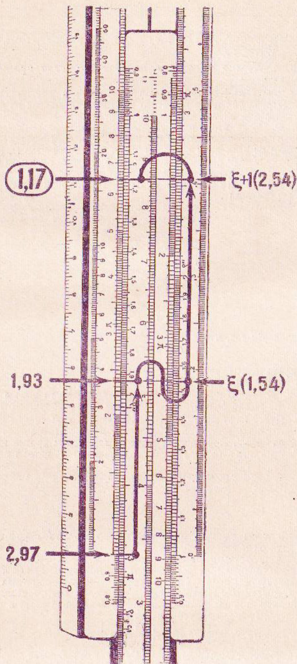


Рис. 104.

191. Вычислить $\sqrt{3{,}46^2+4{,}12^2}$, $\sqrt{6{,}95^2+1{,}16^2}$, $\sqrt{2{,}47^2+5{,}67^2}$, $\sqrt{3{,}1^2-1{,}5^2}$, $\sqrt{0{,}92^2+1{,}12^2}$; $\sqrt{2{,}1^2-1{,}6^2}$.

Замечание. *Нужно учитывать порядок* ξ *и, если нужно, применять переброску движка.*

Выражения вида $\sqrt{a^2+b^2}$ можно вычислять ещё и другим способом с помощью тригонометрических шкал. Для этого надо вынуть движок из линейки и вставить его обратной стороной так, чтобы шкала тангенсов T оказалась непосредственно над шкалой D. После этого надо поставить конец шкалы T (где стоит 45°) против бо́льшего из чисел a и b на шкале D, а бегунок установить против второго (меньшего) из этих двух чисел, взяв его также на шкале D. Затем следует прочесть угол, отмеченный бегунком на шкале T и, не сдвигая бегунка, передвинуть движок так, чтобы к визирной линии подошёл тот же самый угол, но уже взятый на шкале синусов S. Тогда конец шкалы T отметит на шкале D искомый результат.

Этот способ основан на известных соотношениях между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Очевидно, в треугольнике OPB (рис. 100) будем иметь:

$$r=\sqrt{p^2+q^2},$$

$$p=q\operatorname{tg}\alpha,$$

$$p=r\sin\alpha.$$

Отсюда

$$r=\frac{p}{\sin\alpha},$$

если угол α определён так, что

$$q\operatorname{tg}\alpha=p.$$

Устанавливая конец шкалы тангенсов против q на шкале D, мы найдём против p на этой шкале такой угол α, который удовлетворяет этому равенству. Разделив затем p на $\sin\alpha$, для чего к визирной линии надо подвести угол α на шкале S и прочитать ответ на шкале D против конца шкалы S, мы получим ответ.

Пример. Пусть надо найти $\sqrt{3^2+4^2}$. Ставим конец шкалы T против 4 на шкале D. Бегунок ставим против 3 на шкале D и читаем на шкале T против визирной линии угол 36°53′. Передвигаем движок так, чтобы против визирной линии встал угол 36°53′ на шкале S. Против конца шкалы T читаем на шкале D ответ: пять.

● *Сообразите, как с помощью тригонометрических шкал можно находить выражения* $\sqrt{a^2-b^2}$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}.$$

Чтобы найти x из такого уравнения, нужно сложить обратные величины данных чисел и взять обратную величину результата. Для этой операции мы воспользуемся свойствами перевёрнутого движка. Перевернув движок и взяв в качестве основной шкалы (для установки a, b и получения x) всё ту же шкалу C (теперь перевёрнутую), мы получаем в качестве шкалы обратных величин для чисел шкалы C шкалу D. Поэтому схема сложения сохраняется, если мы употребляем для промежуточных результатов шкалу D (данные числа и окончательный результат находятся на перевёрнутой шкале C).

Пример. Решить уравнение $\frac{1}{2{,}97}+\frac{1}{1{,}93}=\frac{1}{x}$.

Перевернув движок, ставим 2,97 шкалы C против начала шкал линейки (рис. 104). Против 1,93 шкалы C находим на шкале D: $\xi=1{,}54$; $\xi+1=2{,}54$. Возвращаясь на шкалу C, получаем $x=1{,}17$.

192. Решить уравнения:

$$\frac{1}{5{,}55}+\frac{1}{3{,}96}=\frac{1}{x};\quad \frac{1}{1{,}165}+\frac{1}{2{,}68}=\frac{1}{x};\quad \frac{1}{7{,}05}+\frac{1}{3{,}15}=\frac{1}{x}.$$

● *Схема вычисления остаётся во всех случаях одна и та же: меняются только применяемые шкалы.*

XXI. ЗНАЧКИ, НАНЕСЁННЫЕ НА ЛИНЕЙКЕ

$\pi = 3{,}14159$	***A, B, C, D***
$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}12838$	***C***
$C_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3{,}56825$	***C***
$M = \frac{1}{\pi} = 0{,}31831$	***A, B***
$\vert = \frac{\pi}{4} = 0{,}78540$	***A, B***
$\rho^\circ = \frac{180}{\pi} = 57{,}296$	***C***
$\rho' = 3437{,}8$	***C***
$\rho'' = 206265$	***C, D***
$\rho'' = 636620$	***C, D***
$\sqrt{\ } = \sqrt{2g} = 4{,}429$	***C***

Буквы ***A, B, C, D*** указывают, на каких шкалах наносится данный значок.

§ 54. На линейках разных систем бывают нанесены и разные значки. Обычно на линейке наносятся не все перечисленные значки. Значки M, ρ° и $\sqrt{\ }$ встречаются реже остальных.

Значки M и | наносятся обычно в п р а в о й п о л о в и н е шкал ***A*** и ***B***.

Значок $\sqrt{\ }$ бывает полезен при гидравлических расчётах, при которых часто бывает нужна величина $\sqrt{2g}$.

Употребление остальных значков ясно или же было уже разобрано.

На специальных линейках (для электротехников, железобетонщиков и т. п.) есть много других специальных значков, употребление которых разбирается в руководствах фирм, выпускающих такие линейки.

XXII. СЧЁТНЫЕ ЛИНЕЙКИ С ДВОЙНЫМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ШКАЛАМИ

§ 55. В последнее время всё большее распространение получают счётные линейки *с двойными логарифмическими шкалами*, дающие возможность вести вычисления с натуральными логарифмами (логарифмами по основанию e), вычислять значения показательной функции e^x, решать логарифмические и показательные уравнения и легко вычислять степени с дробными показателями. Расчёты такого рода часто встречаются в термодинамике, радиотехнике, электротехнике, гидравлике и других инженерных дисциплинах. Их можно выполнять и на обычной линейке, но на линейке с двойными логарифмическими шкалами выполнять их гораздо проще.

Счётная линейка с двойными логарифмическими шкалами была предложена в конце прошлого века и раньше часто называлась линейкой системы «Дуплекс». В этой книжке описывается счётная линейка «Кейфель и Эссер» с 20 шкалами. На некоторых линейках имеется меньшее количество шкал; в этом случае, сравнивая линейку с чертежами в книжке, легко установить, какие шкалы на ней отсутствуют.

Шкалы линейки

§ 56. На лицевой стороне счётной линейки с двойными логарифмическими шкалами имеется 10 шкал (рис. VIII, см. вклейку между стр. 126 и 127), обозначенных ***C***, ***D***, ***CF***, ***DF***, ***CI***, ***CIF***, ***L***, ***LL1***, ***LL2***, ***LL3***. Шкалы ***C***, ***CI***, ***CF***, ***CIF*** нанесены на движке, остальные — на корпусе линейки. Шкалы ***C*** и ***D*** — обычные логарифмические шкалы, такие же, как шкалы ***C*** и ***D*** на обыкновенной логарифмической линейке. На этих шкалах выполняются все обычные вычисления. Шкала ***CI*** — обратная шкала, которая на обыкновенной линейке обозначалась буквой ***R*** (буквы ***CI*** обозначают «*C*-Inverse», т. е. «*C*-обратная»). Шкалы ***CF*** и ***DF*** представляют собой шкалы ***C*** и ***D***, сдвинутые на π, так что некоторому числу N на шкале ***C*** соответствует число πN на шкале ***CF***; то же самое справедливо относительно чисел на шкалах ***D*** и ***DF***. Очевидно, что на шкалах ***CF*** и ***DF*** можно также выполнять все вычисления, как и на шкалах ***C*** и ***D***.

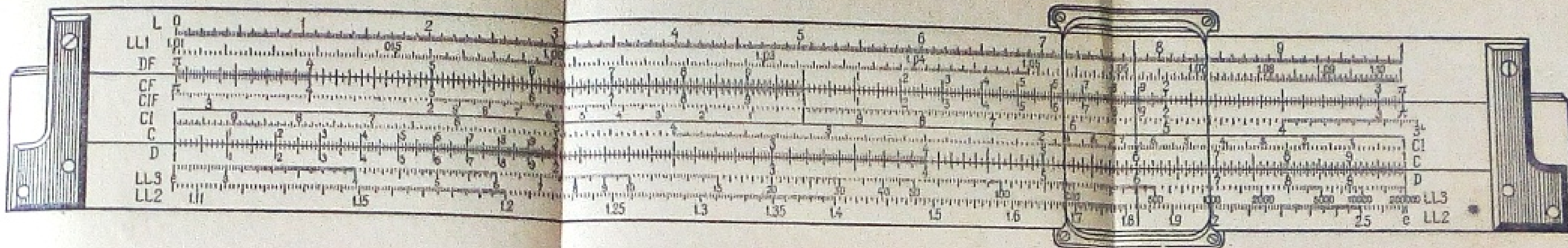
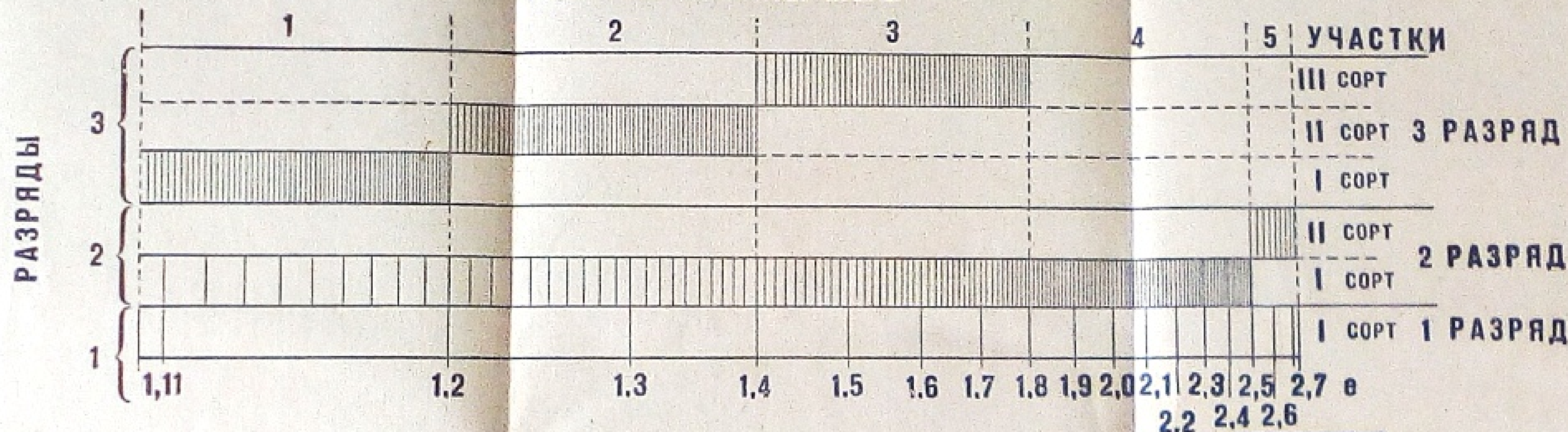
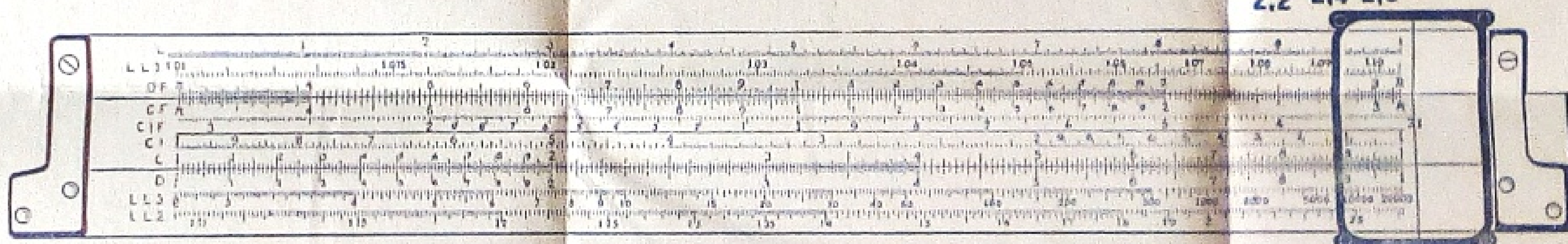


Рис. VIII

ДЕЛЕНИЯ ШКАЛЫ LL2







Панов Д. Ю.

Рис. IX

193. Рассмотрите внимательно шкалы *C* и *D*, *CF* и *DF*. Какое число стоит в начале и конце шкал *CF* и *DF*? Против какого числа на шкале *C* стоит 1 на шкале *CF*? Есть ли какая-нибудь разница в делениях между чёрточками, отмеченными одними и теми же цифрами на шкалах *C* и *CF* или *D* и *DF*?

Шкала *L* в точности соответствует шкале *L* на обыкновенных линейках. Это — шкала логарифмов чисел шкалы *D*. Деления её и способ её употребления подробно описаны в §§ 33 и 34 этой книжки.

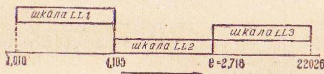


Рис. 105.

Шкалы *LL1*, *LL2*, *LL3* — новые. Этих шкал на обыкновенной линейке нет и их надо изучить подробно. На рис. IX (см. вклейку между стр. 126 и 127) показана система делений этих шкал. Прежде всего заметим, что эти три шкалы являются продолжением одна другой: там, где кончается шкала *LL1*, начинается шкала *LL2*, а там, где кончается шкала *LL2*, начинается шкала *LL3* (рис. 105). В начале шкалы *LL1* (она расположена в верхней половине корпуса) стоит число 1,010; концу этой шкалы соответствует число 1,105. С этого же числа начинается шкала *LL2* (внизу корпуса линейки), которая заканчивается числом $e=2{,}718$ (основание натуральных логарифмов). Шкала *LL3* начинается числом *e* и заканчивается числом 22026. Мы начнём изучение шкал *LL1*, *LL2* и *LL3*, которые и являются *двойными логарифмическими шкалами*, с последней из них — шкалы *LL3*.

Шкала *LL3*

Шкала *LL3* крайне неравномерна. Она состоит из 14 участков, разделённых по-разному. Участки эти таковы:

1 участок: от *e* до 4;
2 участок: от 4 до 6;
3 участок: от 6 до 10;
4 участок: от 10 до 15;
5 участок: от 15 до 30;
6 участок: от 30 до 50;
7 участок: от 50 до 100;
8 участок: от 100 до 200;
9 участок: от 200 до 500;
10 участок: от 500 до 1000;
11 участок: от 1000 до 2000;
12 участок: от 2000 до 5000;
13 участок: от 5000 до 10000;
14 участок: от 10000 до 22026 (до конца).

194. Найдите все эти участки на линейке.

Запомнить, как разделены все эти участки, невозможно: их слишком много. Да это и не нужно, так как, имея некоторый навык в работе с линейкой, вы уже знаете, как следует разбираться в делениях новых шкал. Прежде всего надо посмотреть, чему соответствуют в каждом промежутке деления первого разряда, соответствующие первой цифре числа; потом разобраться в делениях второго разряда, соответствующих второй цифре числа; затем в делениях третьего разряда. На рис. IX изображены деления первого разряда в каждом из промежутков. Эти деления таковы:

№ участка	Цена деления 1 разряда	№ участка	Цена деления 1 разряда	№ участка	Цена деления 1 разряда
1	1	5	10	10	100
2	1	6	10	11	1 000
3	1	7	10	12	1 000
4	10	8	100	13	1 000
		9	100	14	10 000

195. Найдите все эти деления на линейке.

196. Установите бегунком на шкале *LL3* такие числа: 10; 20; 50; 60; 90; 200; 400; 600; 800; 3000; 7000; 9000; 10 000; 20 000. Проверьте результаты по рис. IX.

Чтобы разобраться в делениях второго разряда, надо посмотреть, на сколько частей разделён промежуток между делениями первого разряда в каждом из участков. Деления второго разряда имеются трех сортов.

Деления I сорта делят каждый промежуток между делениями первого разряда на десять частей.

Деления II сорта делят промежутки между делениями первого разряда на пять частей.

Деления III сорта делят промежутки между делениями первого разряда только на две части.

В различных участках шкалы *LL3* нанесены деления второго разряда разных сортов, а именно:

№ участка	Какие нанесены деления 2 разряда	№ участка	Какие нанесены деления 2 разряда
1 — 6	I сорта	11	I сорта
7	II сорта	12	II сорта
8 — 9	I сорта	13	III сорта
10	III сорта	14	I сорта

197. Найдите все эти деления второго разряда на линейке. Помните, что вы сейчас изучаете деления второго разряда, т. е. деления, соответствующие второй цифре числа.

198. Установите на шкале *LL3* числа: 3,5; 4,5; 4,1; 3,8; 2,8; 5,9; 7,6; 9,1; 11; 18; 23; 37; 44; 120; 150; 190; 300; 400; 250; 450; 230; 370; 1500; 1700; 15 000; 11 000; 21 000;

199. Установите на шкале *LL3* следующие числа, помня, что они находятся в таких участках шкалы, где нет делений I сорта второго разряда: 56; 68; 72; 83; 57; 650; 850; 670; 830; 6500; 7500; 6300; 8600; 3200; 4600; 3700. Чтобы лучше разобраться в задаче, посмотрите еще раз рис. IX.

Деления третьего разряда нанесены лишь в начале шкалы *LL3*: в участках 1 и 4 нанесены деления II сорта, в участках 2 и 5 — деления III сорта (рис. IX). В остальных участках нанести их нельзя, так как они оказываются слишком мелкими.

200. Найдите эти деления третьего разряда на линейке.

201. Установите бегунком на шкале *LL3* такие числа: 3,12; 3,88; 4,35; 5,85; 12,4; 14,8; 17,5; 23,5; 28,5; 3,77; 4,23; 5,67; 13,5; 14,1; 22,3. Помните, что на шкале *LL3* для установки третьей цифры числа не существует делений I сорта.

Вы видите, что на шкале *LL3* приходится устанавливать числа на глаз чаще, чем на других шкалах, с которыми вы имели дело



Рис. 106.

до сих пор. Это происходит потому, что шкала охватывает очень большое количество чисел (от 2,718 до 22 026) и в силу этого очень сжата и очень неравномерна. Из-за этих же причин и разделена она более сложным образом, чем другие шкалы. При нанесении делений их приходится подбирать так, чтобы их было по возможности больше (чтобы шкала была подробнее) и в то же время так, чтобы они не были чересчур мелкими.

202. Прочтите отмеченные чёрточками на рис. 106 числа шкалы *LL3*.

Шкала *LL2*

Шкала *LL2* нанесена непосредственно под шкалой *LL3* и, как уже было сказано, является её продолжением влево, охватывая числа от 1,1052 до 2,718. Она гораздо проще шкалы *LL3*. На рис. IX её деления изображены в верхней половине рисунка.

На этой шкале имеется только 5 участков, разделённых по-разному. Эти участки таковы:

1 участок: от 1,1052 до 1,2;
2 участок: от 1,2 до 1,4;
3 участок: от 1,4 до 1,8;
4 участок: от 1,8 до 2,5;
5 участок: от 2,5 до *e*.

Деления этой шкалы имеют следующую особенность: деления первого разряда соответствуют второй цифре числа, так как первая цифра числа меняется в пределах шкалы лишь один раз. В левой части шкалы все числа начинаются с цифры 1 и лишь в правом конце шкалы стоят числа, начинающиеся с цифры 2. Очевидно, что деления второго разряда будут отвечать третьей цифре числа, а деления третьего разряда — четвёртой цифре.

Деления первого разряда идут вдоль всей шкалы через 0,1. Они отмечены числами: 1,2; 1,3; ...; 1,9; 2; 2,5.

203. Найдите деления первого разряда шкалы *LL2* на линейке.

204. Установите бегунком на шкале *LL2* числа: 1,2; 1,4; 1,7; 2,0; 2,3; 2,7.

Каждое деление первого разряда до 2,5 разделено на 10 частей штрихами, имеющими длину, несколько бо́льшую, чем остальные. Пятые штрихи, отмечающие половины делений первого разряда, ещё длиннее. В начале шкалы эти штрихи отмечены числами 1,15; 1,25; 1,35. Кроме того, в самом начале шкалы отмечен штрих 1,11 (чтобы легче запомнить, с какого числа начинается шкала). Следует помнить при этом, что началу шкалы *LL2* соответствует число 1,1052, а не 1,11. Число же 1,11 стоит на шкале правее.

Конец шкалы *LL2* от штриха 2,5 до штриха $e = 2{,}718$ разделён иначе. Здесь каждый промежуток между делениями первого разряда разделён на 5 частей. Таким образом, в этой части шкалы мы имеем деления второго разряда II сорта.

205. Найдите эти деления на линейке.

206. Установите на шкале *LL2*: 1,15; 1,13; 1,18; 1,24; 1,27; 1,35; 1,31; 1,36; 1,47; 1,52; 1,68; 1,92; 2,14; 2,47; 2,52; 2,66.

От начала шкалы *LL2* до штриха 1,8 (т. е. в первых трёх участках) имеются ещё деления третьего разряда. В первом участке (до штриха 1,2) они — I сорта, т. е. делят промежуток между делениями второго разряда на 10 частей; во втором участке (от 1,2 до 1,4) эти деления — II сорта (делят на 5 частей); в третьем участке (от 1,4 до 1,8) они III сорта (деление на 2 части). Дальше 1,8 делений третьего разряда нет.

207. Найдите эти деления на линейке.

208. Установите на шкале *LL2* такие числа: 1,113; 1,167; 1,268; 1,396; 1,575; 1,785; 1,227; 1,343; 1,502; 1,935.

209. Прочтите отмеченные чёрточками на рис. 107 числа шкалы *LL2*.



Рис. 107.

Шкала *LL1*

Шкала *LL1* помещена в верхней части корпуса линейки с лицевой её стороны. Она охватывает числа от 1,0100 до 1,1052 и является продолжением шкалы *LL2* влево (см. рис. 105). Деления ее очень просты: она разделена в точности по тому же принципу, что и основная шкала линейки — шкала *D*. Вдоль всей шкалы идут деления первого разряда, соответствующие 0,01. Эти деления отмечены числами 1,01; 1,02; ...; 1,09; 1,10. Каждый из промежутков между делениями первого разряда разделён на 10 частей делениями второго разряда. Деления третьего разряда имеются трёх сортов: в промежутке от 1,01 до 1,02 они делят каждое деление второго разряда на 10 частей (деления I сорта); в промежутке от 1,02 до 1,05 — на 5 частей (деления II сорта) и, наконец, от 1,05 до конца — на 2 части (деления III сорта). Таким образом, на шкале можно читать и устанавливать пятизначные числа, начинающиеся с цифр 1,0 или 1,1 и имеющие сверх того три цифры, соответствующие делениям первого, второго и третьего разрядов.

210. Рассмотрите внимательно шкалу *LL1* и сами составьте схему делений этой шкалы, аналогичную тем, которые изображены на рис. IX для шкал *LL2* и *LL3*.

211. Установите на шкале *LL1* числа: 1,014; 1,016; 1,0173; 1,0198; 1,0238; 1,0346; 1,0427; 1,0565; 1,0635; 1,0832; 1,1033.



Рис. 108.

212. Прочтите отмеченные чёрточками на рис. 108 числа шкалы *LL1*.

§ 57. На оборотной стороне линейки имеется также 10 шкал (рис. X, см. вклейку между стр. 132 и 133), обозначенных ***A, B, D, DI, K, S, T, S*** & ***T, LLO, LLOO***. Шкалы ***B, S, T, S*** & ***T*** нанесены на движке, остальные — на корпусе линейки. Шкалы ***A, B, D, DI, K, S, T, S*** & ***T*** — те же самые, что и на обычных линейках. Они нам уже хорошо знакомы. Шкалы ***A*** и ***B*** — шкалы квадратов. Шкала ***D*** — основная шкала, которая для удобства повторена на оборотной стороне линейки. Шкала ***DI*** — обратная шкала по

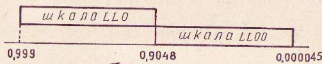


Рис. 109.

отношению к шкале ***D*** (её обозначение происходит от «***D***-Inverse», т. е. «***D***-обратная»). Шкала ***K*** — шкала кубов. Шкалы ***S, T, S*** & ***T*** — тригонометрические шкалы (синусов, тангенсов, синусов и тангенсов малых углов)[1]. Новыми являются только шкалы ***LLO*** и ***LLOO***, которые нам и придётся изучить. Это опять двойные логарифмические шкалы, но нанесённые *в обратном направлении* (справа налево, так же, как обратная шкала ***R*** на обычных линейках). Шкала ***LLOO*** (рис. 109) идёт от 0,000045 до 0,9048, а шкала ***LLO***, являющаяся её продолжением влево, идёт от 0,9048 до 0,9990. Цифры на этих шкалах — красные, так же, как и на обратной шкале, чтобы вычислитель помнил, что на этих шкалах *числа, которые меньше, стоят правее*, в отличие от обычного расположения.

Шкала *LLOO*

Шкала ***LLOO*** очень неравномерна в своей правой части. Она состоит из 7 участков, разделённых по-разному. Эти участки таковы:

1 участок: от 0,9048 до 0,8;
2 участок: от 0,8 до 0,1;
3 участок: от 0,1 до 0,05;
4 участок: от 0,05 до 0,01;
5 участок: от 0,01 до 0,001;
6 участок: от 0,001 до 0,0001;
7 участок: от 0,0001 до 0,000045.

[1]) На тригонометрических шкалах имеется лишь одно новшество: на них указаны красной краской в градусах величины углов, дополнительных до 90°. Это удобно при тригонометрических вычислениях.

Рис. X

Палов Д. Ю.

Рис. XI

Деления первого разряда в этих участках разные. Цена делений первого разряда такова:

№ участка	Цена деления I разряда	№ участка	Цена деления I разряда
1—2	0,1	6	0,0001
3—4	0,01	7	0,00001
5	0,001		

213. Найдите все эти участки на линейке.

214. Установите бегунком на шкале ***LL00*** следующие числа: 0,8; 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,06; 0,09; 0,01; 0,03; 0,001; 0,006; 0,0001; 0,0007; 0,00008; 0,00005.

Каждый промежуток между делениями первого разряда в участках № 1 и № 2 разделён на 10 частей делениями второго разряда. Это деления I сорта. В участке № 4 промежутки между делениями первого разряда разделены на 5 частей. Здесь нанесены деления второго разряда II сорта. Наконец, в участках № 3, 5, 6 промежутки разделены лишь на 2 части; здесь нанесены деления второго разряда III сорта. В участке № 7 делений второго разряда уже нет. Деления третьего разряда имеются только в участке № 1, где каждый промежуток между делениями второго разряда разделён на 5 частей (деления третьего разряда II сорта) и в участке № 2, где промежутки разделены на 2 части (деления третьего разряда III сорта).

215. Найдите все эти деления на линейке.

216. Установите на шкале ***LL00*** такие числа: 0,836; 0,864; 0,735; 0,265; 0,140; 0,065; 0,032; 0,0065; 0,0085; 0,00025; 0,00090.

217. Прочтите отмеченные чёрточками на рис. 110 числа шкалы ***LL00***.



Рис. 110.

● *Помните, что шкала* **LL00** *идёт* ***справа налево!*** *На ней число* 0,836 *стоит* ***левее*** *числа* 0,800.

Шкала *LL0*

Шкала *LL0* гораздо проще шкалы *LL00*. Она состоит всего из двух участков (рис. XI, см. вклейку между стр. 132 и 133). Участок № 1 идёт от 0,999 до 0,990, а участок № 2 — от 0,990 до 0,9048. В участке № 1 деления п е р в о г о р а з р я д а идут через 0,001, а в участке № 2 — через 0,01. Деления в т о р о г о р а з р я д а в обоих участках очень просты, они делят промежуток между делениями первого разряда на 10 частей (деления I сорта). Так же, как и в случае шкал *LL2* и *LL1*, на шкале *LL0* деления первого разряда соответствуют не первой цифре числа, а в т о р о й в участке № 2 и даже т р е т ь е й в участке № 1. По этой причине на шкале н е т д е л е н и й т р е т ь е г о р а з р я д а; и без них уже можно получить четырёх- и пятизначные числа, а бо́льшая точность всё равно не нужна, поскольку при других вычислениях мы её не получим.

218. Найдите все указанные деления на линейке.

219. Установите бегунком на шкале *LL0* следующие числа: 0,9986; 0,9959; 0,9937; 0,986; 0,953; 0,918; 0,907.

220. Прочтите отмеченные чёрточками на рис. 111 числа шкалы *LL0*.

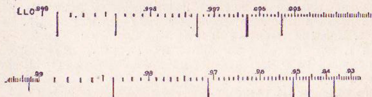


Рис. 111.

● *Шкала **LL0**, так же как и шкала **LL00**, идет **справа налево**. Не забывайте об этом!*

● *На всех двойных логарифмических шкалах **LL3, LL2, LL1, LL00, LL0** числа имеют **только те значения**, которые указаны на этих шкалах. Их нельзя считать больше или меньше в 10^n раз, подобно тому, как это делалось для шкал **A, B, C, D**.*

Вычисления с двойными логарифмическими шкалами

§ 58. При выполнении вычислений с двойными логарифмическими шкалами следует иметь в виду, что шкалы *LL3, LL2, LL1* связаны со шкалой *D*, а шкалы *LL00* и *LL0* — со шкалой *A*. Связь эта такова: на шкалах *LL3, LL2* и *LL1* стоят значения п о к а з а-

тельной функции e^x, если значения x брать на шкале D. На шкалах $LL00$ и $LL0$ стоят значения функции e^{-x}, если значения x брать на шкале A. На рис. 112 показано, каким интервалам

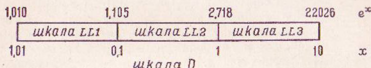


Рис. 112.

значений x на шкале D отвечают значения функции e^x на шкалах $LL3$, $LL2$ и $LL1$. На рис. 113 то же самое сделано для

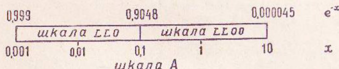


Рис. 113.

функции e^{-x}, когда x берется на шкале A, а значения e^{-x} на шкалах $LL00$ и $LL0$. Рассматривая эти рисунки, мы видим, что шкалы $LL3$, $LL2$ и $LL1$ в совокупности дают нам значения функции e^x для значений x от 0,01 до 10, а шкалы $LL00$ и $LL0$ дают значения e^{-x} для значений x от 0,001 до 10. Это последнее обстоятельство можно выразить ещё и так: шкалы $LL00$ и $LL0$ дают значения *той же самой функции* e^x, *но для отрицательных значений* x, лежащих в промежутке от $x = -0{,}001$ до $x = -10{,}0$. Если стать на эту точку зрения, то двойные логарифмические шкалы дают значения показательной функции e^x для значений от $x = -10{,}0$ до $x = +10{,}0$ (см. рис. 114).

Небольшой промежуток около нуля — от $x = -0{,}001$ до $x = +0{,}01$ (на рис. 114 он заштрихован) исключается, но в этом промежутке справедлива простая формула $e^x \approx 1 + x$,

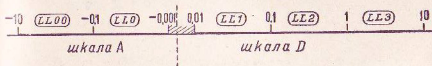


Рис. 114.

которая, как легко видеть, выполняется с точностью, достижимой на линейке, и при $x = +0{,}01$, и при $x = -0{,}001$. В первом случае мы получаем значение

в начале шкалы *LL1*, т. е.

$$e^{0,01} = 1,010 = 1,000 + 0,01,$$

а во втором — значение в конце шкалы *LL0*, которое будет равно

$$e^{-0,001} = 0,999 = 1,000 - 0,001.$$

Устанавливая соотношение между числами двойных логарифмических шкал и числами шкал *A* и *D*, мы, очевидно, уже не можем считать числа шкал *A* и *D* произвольными. Так же, как и в случае тригонометрических шкал, они будут лежать в определённых пределах. Эти пределы таковы:

Числа шкалы D лежат в пределах:

для шкалы ***LL3*** ~ *от* 1 *до* 10,
для шкалы ***LL2*** ~ *от* 0,1 *до* 1,
для шкалы ***LL1*** ~ *от* 0,01 *до* 0,1.

Числа шкалы A лежат в пределах:

для шкалы ***LL00*** ~ *от* 0,1 *до* 10,
для шкалы ***LL0*** ~ *от* 0,001 *до* 0,1.

221. Сообразите, почему пределы значений чисел шкалы *A* разнятся в *сто* раз, в то время как пределы значений чисел шкалы *D* — только в *десять* раз? Вспомните, как связаны между собой числа шкалы *A* и шкалы *D*.

Теперь, зная связь между шкалами *A* и *D* и двойными логарифмическими шкалами, мы можем решать много новых задач, среди которых мы разберем в первую очередь: отыскание значений показательной функции и натуральных логарифмов, возведение чисел в дробные степени, решение показательных уравнений и вычисление логарифмов по произвольному положительному основанию.

Деления на двойных логарифмических шкалах нанесены следующим образом: на этих шкалах длина L отрезка от начала шкалы до штриха, соответствующего числу N, равна

$$L = m(\lg\lg N - \lg\lg e),$$

где m — модуль шкалы, а $e = 2,718$ — основание натуральных логарифмов. На шкале *D* длина соответствующего отрезка будет равна $m \lg x$, и получается, следовательно, что

$$m \lg x = m(\lg\lg N - \lg\lg e),$$

откуда

$$\lg x = \lg\frac{\lg N}{\lg e}$$

и

$$x = \frac{\lg N}{\lg e}.$$

Это можно записать также в виде

$$\lg N = x \lg e$$

или

$$N = e^x.$$

Как найти значение показательной функции и натурального логарифма

§ 59. Как уже было сказано, шкалы *LL3*, *LL2*, *LL1* связаны со шкалой *D*. Если на шкале *D* установлено бегунком некоторое число x, то визирная линия покажет на одной из шкал *LL3*, *LL2* или *LL1* значение e^x. На какой именно из этих шкал окажется значение e^x, будет зависеть от того, в каких пределах заключено число x. Если оно заключено между 1 и 10, то значение e^x надо читать на шкале *LL3*, если между 0,1 и 1,— на шкале *LL2*, если между 0,01 и 0,1,— на шкале *LL1*. Если число x заключено между 0 и 0,01, то значение e^x вычисляется с достаточной точностью по простой формуле

$$e^x = 1 + x,$$

и потому шкала показательной функции e^x для x, меньших 0,01, на линейке не помещена.

Пример 1. Вычислить $e^{1,43}$. Поставим бегунок против числа 1,43 на шкале *D*. Ответ будет на шкале *LL3*, так как 1,43

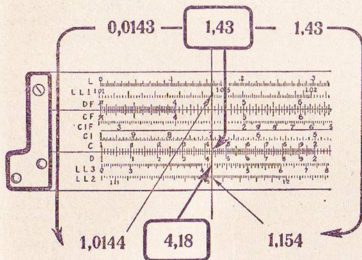


Рис. 115.

лежит в интервале от 1 до 10. На шкале *LL3* читаем четыре — один — восемь (рис. 115). Эти цифры дают вполне определённое число 4,18, так как числа шкалы *LL3* лежат между 2,718 и 22026 (посмотрите рис. 112). Итак,

$$e^{1,43} = 4,18.$$

Пример 2. Вычислить $e^{0,143}$. При той же установке бегунка, что и в предыдущем примере, читаем ответ на шкале *LL2*, так

Рис. 116.

как число 0,143 лежит между 0,1 и 1 (см. рис. 112). Читаем ответ: один — один — пять — четыре (рис. 115).

Значит,

$$e^{0,143} = 1,154.$$

Пример 3. Вычислить $e^{0,0143}$. Бегунок опять стоит в том же положении (рис. 115). Но ответ теперь находится на шкале *LL1*, так как число 0,0143 лежит между 0,01 и 0,1 (рис. 112). На этой шкале читаем: один — ноль — один — четыре — четыре. Итак,

$$e^{0,0143} = 1,0144.$$

Соотношение шкал *LL3*, *LL2* и *LL1* со шкалой *D* можно описать ещё иным способом. Можно считать, что шкала *D* всегда соответствует одному и тому же промежутку от 1 до 10, а на шкалах *LL3*, *LL2* и *LL1* помещены разные функции: на шкале *LL3* — функция e^x, на шкале *LL2* — функция $e^{0,1x}$, на шкале *LL1* — функция $e^{0,01x}$ (рис. 116). Это полезно иметь в виду, так как на некоторых линейках, например на немецких линейках «Аристо» (Aristo), против соответствующих шкал стоят именно такие обозначения.

Рис. 117.

Чтобы лучше разобраться во всем этом, проделаем ещё один пример.

Пример 4. Найти e^x для $x = 0,585$.

Решение. *Способ* 1. Число x лежит в промежутке от 0,1 до 1. Этому промежутку соответствует шкала *LL2* (рис. 112). Устанавливаем бегунок против 0,585 на шкале и читаем на шкале *LL2*: один — семь — девять — пять (рис. 117).

Способ 2. Считаем шкалу ***D*** соответствующей основному промежутку от 1 до 10. Штрих п я т ь — в о с е м ь — п я т ь на этой шкале означает, следовательно, число 5,85. Нам дано число $0{,}585 = 0{,}1 \cdot 5{,}85$. Значит, ответ надо искать на шкале, где помещены значения функции $e^{0,1x}$. Это — шкала ***LL2***. Установка бегунка и результат, конечно, тот же, что и при способе 1.

О т в е т: $e^{0,585} = 1{,}795$.

222. Найти $e^{1,26}$; $e^{2,38}$; $e^{3,02}$; $e^{4,65}$; $e^{6,05}$; $e^{8,95}$; $e^{9,6}$.

223. Найти $e^{0,167}$; $e^{0,193}$; $e^{0,292}$; $e^{0,384}$; $e^{0,495}$; $e^{0,615}$; $e^{0,8}$; $e^{0,935}$.

224. Найти $e^{0,0103}$; $e^{0,054}$; $e^{0,098}$.

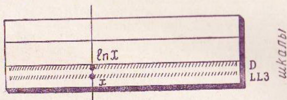


Рис. 118.

§ 60. Если числу y на шкале ***D*** соответствует на одной из двойных логарифмических шкал число $x = e^y$, то, очевидно, что *число y является натуральным логарифмом числа x* (рис. 118):

$$y = \ln x.$$

П р и м е р 1. Числу 3,78 на шкале ***D*** соответствует на шкале ***LL3*** число 43,8 (рис. 119). Это означает, что

$$e^{3,78} = 43{,}8$$

и одновременно, что

$$\ln 43{,}8 = 3{,}78.$$

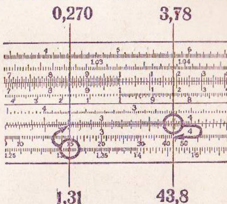


Рис. 119.

П р и м е р 2. Найти $\ln 1{,}31$. Ставим бегунок против 1,31 на шкале ***LL2*** (заметим, что из всех трех шкал ***LL3***, ***LL2*** и ***LL1*** *только на шкале **LL2** имеется число* 1,31) и читаем на шкале ***D*** ответ: д в а — с е м ь — н о л ь (рис. 119). Так как в данном случае шкала ***D*** связана со шкалой ***LL2***, то надо считать, что наш ответ находится в промежутке от 0,1 до 1, т. е.

$$\ln 1{,}31 = 0{,}270.$$

● *При вычислении натуральных логарифмов обращайте внимание на то, какой из двойных логарифмических шкал вы пользуетесь, и помните, что для шкалы **LL3** ответ будет заключён в промежутке от 1 до 10, для шкалы **LL2** — в промежутке от 0,1 до 1 и, наконец, для шкалы **LL1** — в промежутке от 0,01 до 0,1.*

225. Найти ln 1,35; ln 4,00; ln 2,03; ln 1,08; ln 1,148; ln 1,045; ln 50.

226. Решить уравнение

$$e^x = 5{,}9.$$

§ 61. Подобно тому как мы использовали шкалу ***D*** вместе со шкалами ***LL3***, ***LL2*** и ***LL1*** для вычисления значения функции e^x, можно использовать шкалу ***A*** для вычисления значений функции e^{-x} на шкалах ***LL00*** и ***LL0***.

Пример 1. Найти $e^{-0,168}$.

Мы берём значение $x = 0{,}168$ на шкале ***A***. Соответствующее значение функции e^{-x} найдётся на шкале ***LL00*** или ***LL0***. Так как значение x лежит *между* 0,1 *и* 10, то ответ должен быть *на шкале* ***LL00*** (посмотрите рис. 113). Мы ставим бегунок против 0,168 на шкале ***A*** и притом *в её левой половине*, так как вся шкала

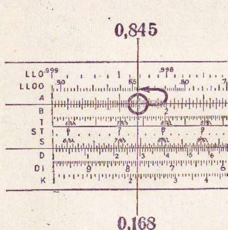


Рис. 120.

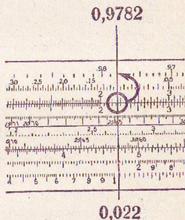


Рис. 121.

охватывает промежуток от 0,1 до 10, а её левая половина — промежуток от 0,1 до 1. На шкале ***LL00*** читаем ответ: восемь — четыре — пять (рис. 120). При этом мы учитываем, что шкала ***LL00*** — это шкала *с красными цифрами*, идущая *справа налево*. Итак,

$$e^{-0,168} = 0{,}845.$$

Пример 2. Найти $e^{-0,022}$.

Значение x лежит в промежутке от 0,01 до 0,1, притом в *правой половине* этого промежутка, так как левая половина идёт от 0,001 до 0,01, а правая от 0,01 до 0,1 (рис. 113). Ответ надо искать на шкале ***LL0***. Устанавливаем бегунок против штриха два—два в правой половине шкалы ***A*** и на шкале ***LL0*** читаем ответ: девять—семь—восемь—два (рис. 121). Получаем

$e^{-0,022} = 0,9782$.

Рис. 122.

Так же, как и при отыскании значений функции e^x, можно считать, что числа шкалы ***A*** лежат всегда в одном и том же промежутке от 0,1 до 10. Тогда шкала ***LL00*** будет давать значения функции e^{-x}, а шкала ***LL0***—значения функции $e^{-0,01x}$ (рис. 122).

227. Проделайте на линейке пример 1 и пример 2.

228. Найти $e^{-0,176}$; $e^{-0,285}$; $e^{-0,465}$; $e^{-0,82}$; $e^{-0,935}$; $e^{-1,62}$; $e^{-3,55}$; $e^{-3,4}$; $e^{-9,45}$.

229. Найти $e^{-0,0018}$; $e^{-0,0044}$; $e^{-0,018}$; $e^{-0,0265}$; $e^{-0,072}$.

Вычисления с показательными функциями и натуральными логарифмами

§ 62. Пример 1. Найти $P = e^{1,8 \cdot 2,16}$.

Для решения этого примера прежде всего надо найти произведение $1,8 \times 2,16$. Это можно сделать обычным путем на шкалах ***C***

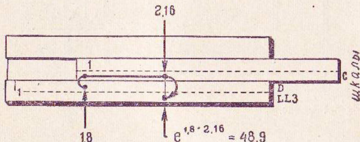


Рис. 123.

и ***D***, поставив 1 шкалы ***C*** против 1,8 на шкале ***D***. Затем надо по-

ставить бегунок против 2,16 шкалы ***C***, но ответ читать не на шкале ***D***, а на одной из шкал ***LL***. В нашем случае — на шкале ***LL3*** (рис. 123), так как 1,8·2,16 меньше 10 и больше единицы. Таким способом мы получим

$$P = e^{1,8\cdot 2,16} = 48,9.$$

230. Сообразите, как аналогичным образом вычислить выражения:

$$1)\ e^{\frac{a}{b}};\quad 2)\ a\ln b;\quad 3)\ \frac{1}{a}\ln b.$$

231.

$$e^{0,15\cdot 3,20};\ e^{0,15\cdot 0,32};\ e^{0,012\cdot 0,35};\ e^{\frac{2,45}{3,5}};\ e^{\frac{0,952}{0,85}};\ 3,2\ln 3,3.$$

232. Груз в Q *кг* поднимается при помощи каната, перекинутого через металлический цилиндр (рис. 124). Какую силу P надо приложить для подъёма этого груза с учётом трения каната о цилиндр? Коэффициент трения $\mu = 0,4$, угол охвата каната $x = \frac{\pi}{2} = 1,571$ радиана.

Указание. Необходимая для расчёта формула дана в условии задачи **96.**

233. При решении предыдущей задачи требовалось вычислить выражение вида $e^{\frac{\pi\cdot\mu}{2}}$. Можно ли вычислять при одной установке движка выражения вида $e^{\frac{a\cdot b}{c}}$ и как это делать?



Рис. 124.

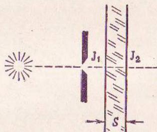


Рис. 125.

234. Луч света силы J_1 падает перпендикулярно на стеклянную пластинку толщиной $s = 2,65$ *см* (рис. 125). Сила света J_2 после прохождения через пластинку оказывается меньше в 2,5 раза.

Вычислить коэффициент поглощения стекла

$$c = \frac{1}{s} \ln \left(\frac{J_1}{J_2} \right).$$

● *При решении задач с показательными функциями и логарифмами надо очень внимательно следить за приблизительной величиной показателя степени функции e^x и аргумента логарифма, чтобы не путать шкалы **LL3, LL2, LL1**.*

Возведение чисел в дробные степени, решение показательных уравнений и отыскание логарифмов при произвольном положительном основании

§ 63. Легко сообразить, что, имея двойные логарифмические шкалы, можно очень просто выполнять возведение чисел в любые степени. Вы уже вычисляли выражения вида $e^{a \cdot b}$. Но так как

$$a = e^{\ln a},$$

то

$$a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \cdot \ln a},$$

и, значит, вычислять выражения вида a^b ничуть не труднее, чем вычислять выражения вида $e^{a \cdot b}$.

Пример 1. Вычислить 3^4.

Ясно, что вычисление можно выполнить уже разобранным способом, если написать

$$3^4 = (e^{\ln 3})^4.$$

Значит, надо найти $\ln 3$, поставить против него начало шкалы *C* и против 4 на шкале *C* прочесть ответ на шкале *LL3*. А чтобы найти $\ln 3$, надо на шкале *LL3* взять число 3. Тогда на шкале *D*

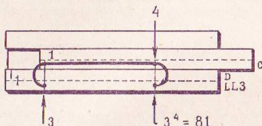


Рис. 126.

против него будет стоять $\ln 3$. В результате следует: поставить начало шкалы *C* против 3 на шкале *LL3* и против 4 на шкале *C* прочесть ответ на шкале *LL3*. Это будет 81 (рис. 126). Итак,

$$3^4 = 81.$$

Пример 2. Найти $3{,}32^{1{,}86}$.

Ставим начало шкалы *C* на движке против 3,32 на шкале *LL3* (рис. 127) и против 1,86 на шкале *C* читаем ответ опять на шкале

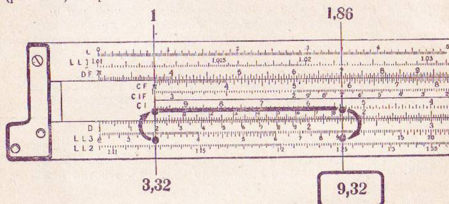


Рис. 127.

LL3: девять — три — два. Учитывая, в каких пределах лежат числа шкалы *LL3*, получаем ответ:

$$3{,}32^{1{,}86} = 9{,}32.$$

Пример 3. Найти $3{,}32^{0{,}186}$.

Как и в предыдущем примере, начало шкалы *C* надо поставить против числа 3,32 на шкале *LL3* и ответ искать против штриха один — восемь — шесть шкалы. Но теперь этот штрих шкалы *C* изображает число, *в 10 раз меньшее*, и потому ответ надо читать *не на шкале LL3, а на шкале LL2.* Читаем: один — два — пять, и получаем, учитывая пределы для чисел шкалы *LL2*:

$$3{,}22^{0{,}186} = 1{,}25.$$

При решении примера 3 мы видели, что уменьшение показателя степени в 10 раз требует перехода со шкалы *LL3* на шкалу *LL2.* Чтобы лучше это понять, можно представить себе шкалы *LL1*,

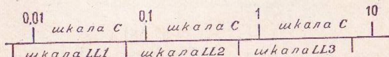


Рис. 128.

LL2, *LL3* как единую шкалу показательной функции e^x, *разрезанную на 3 части*. Ей будет соответствовать шкала значений *x*, получающаяся *повторением* шкалы *D* или шкалы *C* (рис. 128). Так как вы уже знаете, что переход по шкале *C* или *D* в соседний

участок соответствует увеличению или уменьшению в 10 раз тех чисел, которым отвечают штрихи шкалы (см. § 5), то это как раз и означает, что, уменьшая показатель x функции e^x в 10 раз, т. е. переходя в соседний слева участок шкалы D, мы должны и на единой шкале показательной функции e^x перейти в соседний слева участок, на шкалу *LL2*. Это можно формулировать ещё и так:

● *Числа шкалы LL3 являются* ***десятыми степенями*** *чисел шкалы LL2 и* ***сотыми степенями*** *чисел шкалы LL1.*

Соотношение между числами шкал *LL3*, *LL2* и *LL1* изображено на рис. 129.

235. Найти 5^3; $5^{0,3}$; $5^{0,03}$.

236. Найти $1,25^{10}$.

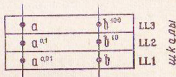


Рис. 129.

Пример 4. Найти $1,3^2$ и $1,3^5$ при помощи двойных логарифмических шкал.

По-прежнему установим начало шкалы C против 1,3 на шкале *LL2*. Тогда против 2 на шкале C можно будет прочесть значение $1,3^2 = 1,69$ на шкале *LL2* (рис. 130). Но если попытаться таким же путём найти $1,3^5$, то оказывается, что сделать

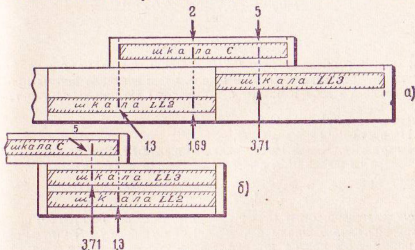


Рис. 130.

этого нельзя, так как штрих 5 на шкале C выходит за пределы шкалы *LL2* (рис. 130, *а*). Это и понятно: ответ должен получиться уже на продолжении шкалы *LL2* вправо, т. е. на шкале *LL3*. Чтобы найти этот ответ, надо поставить против 1,3 на шкале *LL2* не начало, а конец шкалы C и против числа 5 этой шкалы прочесть ответ на шкале *LL3* (рис. 130, *б*).

237. Проделайте это на линейке.

238. Найти $4,54^4$; $2,50^6$; $2,82^{4,15}$; $3,21^{8,27}$.

239. Найти $1,04^{125}$.

Указание. Сначала найдите $1,04^{1,25}$, затем сообразите, где надо читать ответ для заданной задачи.

240. Найти $1,14^5$; $1,25^{9,32}$; $86^{0,333}$; $1,812^3$; $63^{0,843}$; $27^{0,333}$; $47^{0,75}$; $1,177^{5,2}$; $1,101^{3,2}$.

241. Найти $\sqrt[5]{741^2}$.

Указание. $\sqrt[5]{741^2} = 741^{2/5} = 741^{0,4}$.

242. Найти $\sqrt[4]{906}$; $\sqrt[5]{11}$.

§ 64. Для того чтобы уверенно определять порядок результата при возведении чисел в дробные степени, полезно ориентировочно прикидывать, в каких пределах он должен заключаться. Это дает возможность легко решать вопрос и о выборе той шкалы, на которой следует читать ответ.

Пример 1. Найти $8,73^{1,724}$.

Решение. Чтобы установить, в каких пределах будет заключён результат, сначала округлим и основание и показатель, уменьшая их, а затем увеличивая. Очевидно, можно написать

$$8,00^{1,000} < 8,73^{1,724} < 9,00^{2,000}$$

или

$$8 < 8,73^{1,724} < 81.$$

Так как все числа между 2,718 и 22000 лежат на шкале *LL3*, результат надо искать на этой шкале. Ставим начало шкалы против 8,73 на шкале *LL3* и читаем ответ на этой же шкале против 1,724 шкалы *C*.

Ответ: $8,73^{1,724} = 41,9$.

Пример 2. Найти $1,04^{234}$.

Решение. Число $1,04^1$ лежит на шкале *LL1*. Значит число $1,04^{10}$ находится на шкале *LL2*, а число $1,04^{100}$ на шкале *LL3* (см. рис. 129). Очевидно,

$$1,04^{100} < 1,04^{234}$$

и, следовательно, ответ может находиться только на этой же шкале. Установив начало шкалы *C* против 1,04 на шкале *LL1*, читаем ответ на шкале *LL3* против штриха два — три — четыре шкалы *C*.

Ответ: $1,04^{234} = 9680$.

Пример 3. Найти $155^{0,257}$.

Решение. Очевидно,

$$155^{0,1} < 155^{0,257} < 155^1.$$

Число 155 находится на шкале *LL3*, число $155^{0,1}$ — на шкале *LL2*. Значит, ответ может находиться или на шкале *LL2* правее числа $155^{0,1}$, или на шкале *LL3* левее числа 155. Путем пробы

убеждаемся, что надо ставить конец шкалы *C* против числа 155 шкалы ***LL3***, и тогда ответ найдётся в левой части шкалы ***LL3*** против числа 0,257 шкалы ***C***.

Ответ: $155^{0,257} = 3,655$.

243. Найти:

а) $1,03^{1,81}$; $1,03^{18,1}$; $1,03^{181}$;
б) $1,0163^{5,75}$; $1,0163^{57,5}$; $1,0163^{575}$;
в) $8,55^{1,8}$; $8,55^{0,18}$; $8,55^{0,018}$;
г) $1,043^{2,6}$; $1,043^{26}$.

§ 65. Решение показательных уравнений на счётной линейке с двойными логарифмическими шкалами также просто.

Пример 1. Решить уравнение

$$5^x = 12.$$

Решение. Установим начало шкалы *C* против 5 на шкале ***LL3***. Тогда, как было показано выше, при возведении 5 в степени, показатели которых будут стоять на шкале *C*, мы будем получать результаты на шкале ***LL3***. Значит, надо найти на шкале ***LL3*** результат, равный 12, и посмотреть, какому показателю x на шкале *C* он соответствует (рис. 131). Находим

$$\underline{x = 1,544.}$$

Ответ: $x = 1,544$.

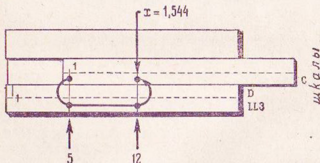


Рис. 131.

Полученный результат можно представить ещё и таким образом: по определению логарифма, если

$$5^x = 12,$$

то

$$x = \lg_5 12.$$

Поэтому установка, изображенная на рис. 131, решает также задачу

отыскания логарифма по произвольному положительному основанию.

244. Решить уравнения $27^x = 81$; $4{,}02^x = 8{,}4$; $7{,}2^x = 83{,}2$.

245. Найти $\lg_2 32$; $\lg_7 100$; $\lg_{3,1} 7{,}34$.

● *При решении показательных уравнений необходимо внимательно следить за тем, на каких шкалах должны устанавливаться данные задачи и какой должен получиться порядок результата. Решая эти вопросы, следует поступать так же, как и при решении задач на возведение чисел в произвольную степень.*

246. Решить уравнение $32^x = 4$.
Сообразите, какой штрих шкалы C — начальный или конечный — надо использовать. Определите порядок ответа. Проверьте решение вычислением на бумаге, без линейки.

247. Решить уравнения $107^x = 5{,}78$; $12^x = 7{,}137$; $81^x = 10$; $1{,}3^x = 7{,}2$; $1{,}541^x = 9{,}96$.

248. Решить уравнение $2{,}66^{3x} = 12$.

249. Решить уравнение $2{,}37^{\frac{1}{x+1}} = 4{,}02$.

250. Найти $\lg_2 8{,}70$; $\lg_{152} 43{,}2$.

Пропорциональные вычисления с двойными логарифмическими шкалами

§ 66. Все, что было сказано о пропорциях, применимо и к вычислениям с двойными логарифмическими шкалами.

Пример 1. Найти x из уравнения

$$\frac{a}{\ln N} = \frac{b}{\ln x}.$$

Мы уже знаем, что если считать, что на шкалах LL стоят числа, то на шкалах C и D стоят их натуральные логарифмы. Рассматривая, как обычно, прорезь между шкалой D и шкалой C как дробную черту и имея в виду пропорциональность стоящих друг против друга чисел шкал C и D при любом положении движка, можем, следовательно, утверждать, что, поставив a на шкале C против N на шкале $LL3$ (или другой подходящей шкале LL), прочтём ответ на шкале $LL3$ против b на шкале C (рис. 132).

Пример 2. Вычислить $1{,}468^{\frac{5,1}{0,32}}$.

Можно, конечно, сначала выполнить деление 5,1 на 0,32, а потом возвести в эту степень число 1,468. Но можно поступить и иначе. Напишем:

$$x = 1{,}468^{\frac{5,1}{0,32}}.$$

Логарифмируя, получим:

$$\ln x = \frac{5,1}{0,32} \ln 1,468,$$

откуда

$$\frac{0,32}{\ln 1,468} = \frac{5,1}{\ln x}.$$

Мы можем непосредственно установить эту пропорцию на линейке

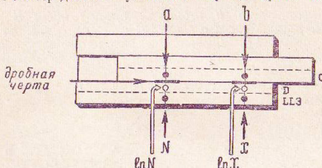


Рис. 132.

по схеме, показанной на рис. 132. Устанавливаем 0,32 шкалы ***C*** против 1,468 шкалы ***LL2*** (надо всегда помнить, какие числа соответствуют каким шкалам!). Тогда против штриха пять — один шкалы ***C*** получится ответ. Он получился бы тоже на шкале ***LL2,***

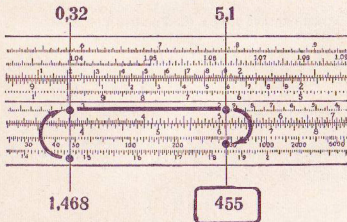


Рис. 133.

если бы пять — один означало 0,51. Но так как нам дано число в 10 раз большее, то ответ надо читать на шкале ***LL3*** (рис. 133).

Он будет 455. Итак,

$$1{,}468^{\frac{5{,}1}{0{,}32}}=455.$$

● *Для вычисления выражений вида*

$$x=N^{\frac{a}{b}}$$

*устанавливают число b шкалы **C** против числа N одной из шкал **LL** и против числа a шкалы **C** читают ответ на соответствующей шкале **LL**. Чтобы легче запомнить это правило, помните, что надо ставить* ***основание против знаменателя.***

Пример 3. Вычислить $\sqrt[3]{36{,}4}$.
Полагаем

$$x=36{,}4^{\frac{1}{3}}.$$

Ставим число 3 шкалы *C* против 36,4 шкалы *LL3* и против 1 шкалы *C* (т. е. её начала) читаем на шкале *LL3* ответ три — три — один. Итак,

$$\sqrt[3]{36{,}4}=3{,}31.$$

251. Сравните решение примера 3 с решением этой же задачи по способу § 63, полагая

$$36{,}4^{\frac{1}{3}}=36{,}4^{0{,}333}.$$

252. Решите задачи **241** и **242** новым способом.

253. Решите при помощи пропорций пример 1 из § 65.

254. Найти $6{,}47^{\frac{4{,}8}{2{,}7}}$; $3{,}82^{\frac{3{,}82}{1{,}71}}$; $42{,}5^{\frac{8{,}74}{6{,}71}}$; $1{,}318^{\frac{7{,}13}{6{,}4}}$; $148^{\frac{72}{342}}$; $343^{\frac{9}{17{,}1}}$; $4{,}86^{\frac{72}{9{,}1}}$.

255. Найти $1{,}0733^{\frac{587}{62{,}9}}$; $1{,}0733^{\frac{587}{629}}$; $1{,}0733^{\frac{58{,}7}{0{,}629}}$.

256. При адиабатическом расширении газа, занимающего объём V_1 при абсолютной температуре T_1 и давлении p_1, до нового состояния, характеризуемого давлением p_2, объёмом V_2 и температурой T_2, будут иметь место формулы:

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

где $\varkappa$ — показатель адиабаты, равный для двухатомных газов 1,4. Вычислить отношения V_2/V_1 и T_2/T_1, если $p_1/p_2=7{,}5$ и $\varkappa=1{,}4$.

Пропорциональные вычисления можно вести, разумеется, и на шкалах *LL0* и *LL00* в соединении со шкалами *A* и *B*.

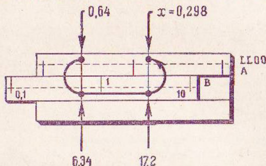


Рис. 134.

Пример 4. Вычислить $x=0{,}64^{\frac{17{,}2}{6{,}34}}$.

Ставим «основание» (в нашем случае 0,64) на шкале *LL00* против «знаменателя» (у нас 6,34) на шкале *B*. При этом движок выходит влево. Число 6,34 мы ставим в левой части шкалы *B*, так как в нашей задаче фигурирует еще число 17,2, для которого также нужно найти место на шкале *B* и которое мы будем ставить в правой части этой шкалы. Против этого числа читаем на шкале *LL00* ответ: $x=0{,}298$ (рис. 134).

● *Не забывайте, что шкалы **LL0** и **LL00** идут справа налево.*

257. Найти $0{,}476^{\frac{3}{7}}$; $0{,}500^{\frac{14}{450}}$; $0{,}265^{\frac{0{,}56}{3{,}8}}$; $0{,}265^{\frac{5{,}6}{3{,}8}}$.

Вычисление некоторых специальных выражений на двойных логарифмических шкалах

§ 67. Используя двойные логарифмические шкалы совместно с другими шкалами линейки, можно вычислять целый ряд выражений, встречающихся при решении тех или иных технических задач. Мы укажем некоторые из них; способы вычислять другие вы легко найдёте сами по аналогии.

Функция e^{-kx^2}

Обычно шкалы *LL0* и *LL00* используются со шкалами *A* и *B*. Но можно использовать их также и совместно со шкалой *D*. Легко сообразить, что тогда получится. Числа шкалы *A* суть квадраты чисел шкалы *D*. Шкалы *LL00* и *LL0* дают значения функций e^{-x} и $e^{-0{,}01x}$, если x берется на шкале *A* (см. рис. 122). Взяв x на

шкале D и установив против него бегунок, мы получим на шкале A число $y=0,1\ x^2$ (множитель 0,1 появится потому, что шкала D

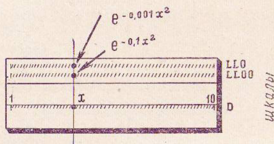


Рис. 135.

идет от 1 до 10, а шкала A — от 0,1 до 10). Значит, бегунок отметит на шкале $LL00$ значение $e^{-y}=e^{-0,1x^2}$, а на шкале $LL0$ — значение $e^{-0,01y}=e^{-0,001x^2}$ (рис. 135).

Пример 1. Найти $e^{-0,1 \cdot 2,4^2}$.

Ставим бегунок против 2,4 на шкале D (рис. 136). На шкале $LL00$ читаем ответ: 0,562.

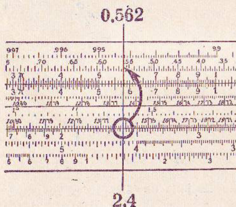


Рис. 136.

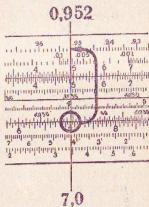


Рис. 137.

Пример 2. Вычислить значение функции $\Phi(x)=e^{-0,001x^2}$ при $x=7$.

Ставим бегунок против 7 на шкале D и на шкале $LL0$ читаем: девять — пять — два (рис. 137). Итак,

$$\Phi(7)=0,952.$$

Пример 3. Вычислить значение функции $\varphi(x)=e^{-0,26x^2}$ при $x=1,29$.

Решение. Ставим начало шкалы *B* против числа 1,29 шкалы *D*. На шкале *A* начало шкалы *B* отметит число $(1,29)^2$. Ставим теперь бегунок против штриха два — шесть шкалы *B*. На шкале *A* мы прочтём тогда произведение 0,26 на $(1,29)^2$ и на шкале *LL00* найдём нужный ответ. Разберём только, в какой половине шкалы *B* надо брать штрих два — шесть. Очевидно, $1,29^2>1$, но, как легко видеть по шкале *A*, в то же время $1,29^2<2$. Число $0,26\cdot 1,29^2$ будет, следовательно, меньше 1, т. е. должно находиться в левой половине шкалы *A*, где стоят числа от 0,1 до 1. Но тогда, конечно, и штрих два — шесть надо брать в левой половине шкалы *B*.

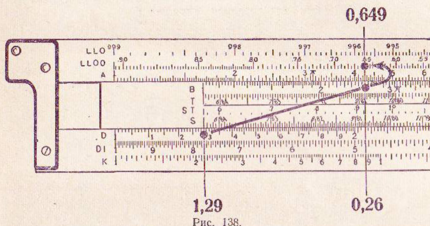


Рис. 138.

Выполнив установку, читаем на шкале результат: шесть — четыре — девять (рис. 138).

Ответ: $\varphi(1,29)=0,649$.

258. Проделайте пример 3 на линейке. Вычислите затем значения функции $\varphi(x)=e^{-0,26x^2}$ при $x=1,82$; 2,62; 4,65.

259. Посмотрите, как решить задачу **258** другим способом. Будет ли он выгоднее?

Указание. Выньте движок из линейки и вставьте его *обратной стороной* так, чтобы против шкалы *D* на той стороне линейки, где нанесены шкалы *LL0* и *LL00*, оказалась шкала *C*. Поставьте 0,26 на шкале *A*, а 1,29 на шкале *C*.

260. Вычислите значения функции $\varphi_1(x)=e^{-2,6x^2}$ при $x=1,29$ и $x=1,84$. В чём будет разница по сравнению с решением задачи **258**?

261. Вероятность того, что отклонение среднего значения *X* величин $x_i (i=1, 2, \ldots, n)$ от их математического ожидания *a*

удовлетворяет неравенству

$$|X-a|<2t\sqrt{\frac{\beta}{n}},\ [\beta = \text{М. О.} \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2]$$

будет больше, чем $1-2e^{-t^2}$.

Подсчитать нижнюю границу вероятности неравенства

$$|X-a|<6\sqrt{\frac{\beta}{n}}.$$

Функции $e^{a \sin x}$ и $e^{a \operatorname{tg} x}$

§ 68. Вы уже знаете, что шкала синусов и шкала тангенсов представляют собой как бы перевод шкалы *C* на «язык синусов» и «язык тангенсов» (см. § 38). Пользуясь этим обстоятельством, легко вычислять значения функций $e^{a \sin x}$ и $e^{a \operatorname{tg} x}$.

Пример 1. Найти $e^{\sin 16°30'}$ и $e^{\operatorname{tg} 16°30'}$.

Вынем движок из линейки и вставим его назад обратной стороной так, чтобы шкалы *S* и *T* на движке были с той же стороны,

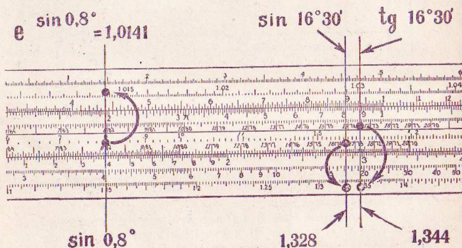


Рис. 139.

где и шкалы ***LL1***, ***LL2*** и ***LL3*** (рис. 139). Установив движок против 16,5° (16°30′) на шкале ***S***, прочтём ответ на шкале ***LL2***: о д и н — т р и — д в а — в о с е м ь. Если установить бегунок против 16,5° на шкале ***T***, то на шкале ***LL2*** прочтём: о д и н — т р и — ч е т ы р е — ч е т ы р е. Итак, $e^{\sin 16°30'} = 1{,}328$, $e^{\operatorname{tg} 16°30'} = 1{,}344$.

● *Если на линейке бегунок* ***двусторонний*** *(т. е. визирные линии на нём имеются с обеих сторон и при установке бегунка*

*указывают одно и то же деление на шкале **D** и с лицевой, и с оборотной стороны линейки), то вынимать движок не надо. Всё можно сделать, оборачивая всю линейку целиком.*

● *При использовании шкалы **S** и шкалы **T** ответ **всегда** будет получаться **на шкале LL2**, так как синусы и тангенсы на шкалах **S** и **T** имеют значения от* 0,1 *до* 1, *которым и соответствует шкала **LL2**.*

● *Тригонометрические шкалы на новых линейках иногда наносятся **с десятичным делением градусов**, т. е. с делением градуса на десятые и сотые доли, а не на минуты и секунды. Это надо учитывать.*

Пример 2. Найти $e^{\sin 0{,}8^\circ}$.

Синусы и тангенсы углов, меньших 5°44′, нанесены, как вы знаете, на шкале ***S&T***. Поэтому поставим бегунок на деление 0,8° шкалы ***S&T***. Ответ один — ноль — один — четыре — один прочтём на шкале ***LL1*** (рис. 139).

● *При использовании шкалы **S&T** ответ **всегда** будет получаться **на шкале LL1**, так как синусы и тангенсы на шкале **S&T** имеют значения от* 0,01 *до* 0,1, *которым и соответствует шкала **LL1**.*

262. Найти $e^{\sin 13^\circ 21'}$; $e^{\operatorname{tg} 15^\circ 42'}$; $e^{\sin 21^\circ 12'}$; $e^{\operatorname{tg} 27^\circ 6'}$; $e^{\sin 32{,}2^\circ}$.

263. Найти $e^{\sin 1{,}433^\circ}$; $e^{\operatorname{tg} 2^\circ 21'}$.

Пример 3. Вычислить $e^{1{,}2 \sin 11^\circ}$.

Рис. 140.

Вставляем движок в линейку так же, как и при решении примера 1. Сдвигаем его так, чтобы начало шкалы ***S*** пришлось против штриха один — два шкалы ***D*** (рис. 140). Ставим бегунок против

штриха о д и н н а д ц а т ь г р а д у с о в шкалы ***S***. Тогда бегунок отметит на шкале *D* произведение $1{,}2\cdot\sin 11^\circ$, а против него на шкале ***LL2*** будет ответ: о д и н — д в а — п я т ь — с е м ь. Итак, $e^{1,2 \sin 11^\circ} = 1{,}257$.

● *При решении подобных задач ответ может получаться не только на шкале* ***LL2****, но и на шкале* ***LL3*** *и на шкале* ***LL1****. Все теперь будет зависеть от величины множителя.*

П р и м е р 4. Вычислить $e^{4,6 \sin 30^\circ}$.

Против числа 4,6 шкалы ***D*** теперь надо ставить к о н е ц шкалы ***S***. Поставив бегунок против 30° шкалы ***S***, читаем ответ н а ш к а л е ***LL3***, так как теперь показатель степени б о л ь ш е е д и н и ц ы (нам пришлось использовать конец шкалы ***S***). Получаем д е в я т ь — д е в я т ь — с е м ь. Таким образом, $e^{4,6 \sin 30^\circ} = 9{,}97$.

264. Вычислить $e^{3,7 \operatorname{tg} 42^\circ}$.

265. Вычислить $e^{0,0111 \sin 59^\circ}$.

Чтение за пределами шкал

§ 69. При вычислениях могут встретиться случаи, когда результат получается больше или меньше тех чисел, которые нанесены на двойных логарифмических шкалах. В этих случаях надо п р е о б р а з о в ы в а т ь вычисляемое выражение и вычислять результат по частям. Дать какие-либо стандартные правила для этого трудно, нужно соображать, что будет лучше.

П р и м е р 1. Найти 24^5.

Р е ш е н и е. *Способ* 1. Очевидно, $24^5 = 24^3 \times 24^2$. Находим $24^3 = 13\,820$ и $24^2 = 576$. Затем перемножаем и получаем $24^5 = 7\,960\,000$.

Способ 2. Очевидно, $24^5 = 6^5 \times 4^5$. Находим $6^5 = 7780$ и $4^5 = 1024$. Перемножаем и получаем опять 7 960 000.

Способ 3. Очевидно, $24^5 = 2{,}4^5 \times 10^5$. Находим $2{,}4^5 = 79{,}6$ и умножаем на 100 000. Получаем 7 960 000.

О т в е т: $24^5 = 7{,}96 \cdot 10^6$.

266. Найти $8{,}5^6$; $124^{3,2}$; $2{,}7^{12,5}$.

XXIII. СЧЁТНЫЕ ЛИНЕЙКИ МАЛОГО РАЗМЕРА

Кроме обычных линеек со шкалами длиной 25 сантиметров, в продаже имеются *малые* счётные линейки со шкалами длиной 12,5 *см*. На этих линейках шкалы разделены иначе. Чтобы разобраться в шкалах такой линейки, сделайте сами чертёж, аналогичный рис. II. На шкалах ***C*** и ***D*** легко отыскать деления первого разряда, соответствующие первой цифре устанавливаемого или читаемого числа; эти деления снабжены цифрами, так же как и на обычных линейках. Каждый из промежутков между делениями первого разряда разделён на десять частей делениями второго разряда. Дальше же надо смотреть, на сколько частей разделены промежутки между делениями второго разряда. Рассмотрев шкалу, легко увидеть, что между 1 и 2 имеются деления второго сорта, между 2 и 5— деления третьего сорта. Дальше мелких делений вообще нет. Вычисления на маленьких линейках выполняются точно так же, как и на обычных.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

5. В промежутке от 2 до 3.

7. Они немного длиннее остальных.

12. Нет. Правильная установка такая, как на рис. 141.

13. Число 3,65 устанавливается посредине между чёрточками 3,64 и 3,66.

Примечание. Решая задачу 13, мы поставили бегунок посредине между чёрточками 3,64 и 3,66. Это не совсем верно, так как расстояние между чёрточкой 3,64 и 3,65 (если бы она была нанесена) должно быть несколько больше, чем между 3,65 и 3,66 (подобно тому как расстояние от чёрточки *4* до чёрточки *5* больше, чем от чёрточки *5* до чёрточки *6*), но разница эта настолько мала, что практически ею вполне можно пренебречь (в самом деле: ещё для пятизначных логарифмов $\log 3,65 - \log 3,64 = 0,56229 - 0,56110 = 0,00119$ и $\log 3,66 - \log 3,65 = 0,56348 - 0,56229 = 0,00119$, и только беря шестизначные логарифмы, мы обнаруживаем, что $\log 3,65 - \log 3,64 = 0,562293 - 0,561101 = 0,001192$, а $\log 3,66 - \log 3,65 = 0,563481 - 0,562293 = 0,001188$).

22. 1; 2; —1; 0; 3; 1; —2; 2.

24. 6,70.

25. 17,00.

26. 4,20; 0,0525; 84; 22,2.

27. 5,02; 10,14; 1,691; 15,85.

28. 2,62; 0,1774; 6,99.

29. 77,8 *кг*.

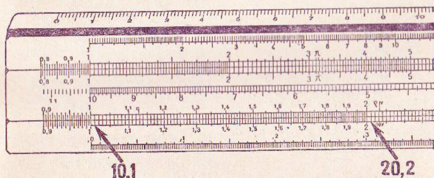


Рис. 141.

30. 86,8 *т*.

31. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.

32. 1,36; 14,4.

33. Частное получится на шкале *D* против конечной черты движка.

34. 42; 0,5.

35. 0,1641; 6,65; 0,396; 32,22.

36. 2,5; 66,6; 18,85; 15,88.

37. 37,4 коп.

38. 2,08; 0,01964.

39. 0,784; 0,0001602.

40. $x_1 = 1,977$; $x_2 = 2,31$; $x_3 = 4,36$; $x_4 = 7,58$.

41. $\alpha_1 = 0{,}2195$; $\alpha_2 = 0{,}579$; $\alpha_3 = 0{,}812$.
42. $x_1 = 17{,}50$; $x_2 = 0{,}1942$; $x_3 = 2{,}27$; $x_4 = 242$.
43. $s_1 = 0{,}421$; $s_2 = 0{,}0493$; $s_3 = 0{,}000774$; $s_4 = 8{,}50$.
44. $a = 152{,}3$; $b = 19{,}61$; $M = 38{,}4$; $N = 6{,}28 \cdot 10^3$.
45. Прочитанные на шкале A числа 4 и 9 суть *квадраты* чисел 2 и 3.
47. В промежутке от 1 до 2 — *двум*, в промежутке от 2 до 5 — *пяти*; от 5 до 10 делений третьего разряда нет вовсе.
52. 5,57; 0,245; $6{,}32 \cdot 10^2$; 1,357; 0,0110; 0,937; 11,36; 0,0000479.
53. 7,25; 0,797; 3,80; 0,266; 29,9; 0,01414; 10,4; 3,24.
54. 4,25; 0,000358; 0,268; 75,15.
55. 0,1626; 1,666; 0,473; 4,17.
57. 3,78.
58. 3,22.
59. 1193,7 *м*.
61. 253,4.
62. 20,42 *м*.
63. 132,7 *м*².
64. 40,05 *см*.
65. 407 *кг*.
66. 12,8; 22,4; 33,6; 15,6; 48; 68.
67. 4,5; 6,76; 8,03; 73,7; 15,36; 37,4.
68. 1664; 1024; 74,7; 21,9; 1,547.
69. 3,10; 3,25; 3,46; 3,85; 5,50.
70. $z = x^2$; $u = x^3$; $x = \sqrt{z}$; $x = \sqrt[3]{u}$.
71. $\frac{x}{y} = \text{const}$; $\frac{\sqrt{z}}{y} = \text{const}$; $\frac{\sqrt[3]{u}}{y} = \text{const}$.
72. $x_1 = 2{,}18$; $x_2 = 3{,}41$; $x_3 = 4{,}41$.
73. $\alpha_1 = 0{,}981$; $\alpha_2 = 1{,}067$; $\alpha_3 = 1{,}147$; $\alpha_4 = 1{,}199$.
74. $\lambda = 0{,}894$; $\mu = 1{,}093$; $\nu = 1{,}293$.
75. 168 *мм*; 145 *мм*; 102,6 *мм*.
80. Новым; при этом способе не может быть такого случая, когда произведение получается за пределами шкалы (и, следовательно, нужна переброска).
81. 1,778; 3,06; 0,353.
82. а) С обычным, б) с перевёрнутым, в) с обычным, г) в первом случае с перевёрнутым, во втором — с обычным.
83. 1,069; 1,221; 1,425; 1,71; 2,14; 2,85; 4,28.
84. 44%; 37,7%; 33%; 29,3%; 26,4%.
85. 45,6; 18,2; 11,4.
86. $\sqrt{zy} = \text{const}$.
87. 4,04 *м/сек*; 2,76 *м/сек*; 1,61 *м/сек*; 0,769 *м/сек*; 0,558 *м/сек*.
88. 0,103 *см*; 0,0370 *см*; 0,00926 *см*; 0,0028 *см*.
89. W: 54,6; 43,2; 38,7; 34,4; 29,2. p: 5,62; 8,00; 11,9; 19,0; 32,8; 64,0.
90. $k = 0{,}00267$.
91. 1344,6; 3,858.
92. 1,8162; 0,3874; 2,223.
93. 220,3; 9,27; 1,841; 91,2; 124,7; 0,1358; 0,04395.
94. 39,8; $1{,}698 \cdot 10^4$; 1,233; 118,8; 0,00457; 0,692.
95. 4,58; 0,0001455; 0,739; 1,515; 11,32; 4,95.
96. 4222 *кг*.
117. 0,588; 0,676; 0,279; 0,322.
118. 0,1515; 0,1019; 0,494; 0,0457; 0,0211.
119. Так как $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, то вместо $\cos\alpha$ ищут $\sin(90° - \alpha)$.
120. 0,284; 0,690; 0,920.
121. 14°47′; 42°4′; 7°49′; 11°7′; 71°49′; 1°30′26″.
122. 16°42′; 43°50′; 9°30′; 2°2′; 4°8′41″; 89°5′51″.
123. 0,326; 0,941.
124. 4,10.
125. $S = 2{,}52$; $t = 3{,}38$; $T = 76{,}4$; $a = 15{,}08$.
126. $b = 35{,}91$; $b = 5{,}60$; $b = 16{,}01$; $a = 9{,}32$; $b = 1{,}451$; $c = 1{,}819$; $c = 6{,}20$.
127. $h = 200 \cdot \text{tg}\, 1°30' = 5{,}24$.
128. 1,732.
129. 1,192; 1,907; 9,13; 21,9.
130. От 1 до 10.
131. 3,08.
132. tg: 1,213; 1,483; 1,816; 7,35; 15,00. ctg: 0,824; 0,675; 0,551; 0,1361; 0,0667.
133. 0,825; 0,0539; 2,56; 20,3.
134. $A = 0{,}0885$; $\delta = 0{,}000332$.
135. $\eta_s = 0{,}36$.
136. $\mu = 1{,}6$.
138. а) 19°4′; б) 26°11′; в) 14°32′; г) 9°33′; д) 8°22′.
139. 23°12′; 12°32′; 43°2′; 36°52′.
141. $\beta_1 = 1°42'13''$; $\beta_2 = 2°33'23''$; $\beta_3 = 4°2'26''$; $\beta_4 = 8°40'$; $\beta_5 = 11°25'$; $\beta_6 = 16°34'$.
142. $x_1 = 30°43'$; $x_2 = 14°48'$; $x_3 = 7°20'$; $x_4 = 4°23'36''$; $x_5 = 1°27'47''$.
143. $a_1 = 160{,}5$; $a_2 = 94{,}9$; $a_3 = 73{,}6$; $a_4 = 52{,}4$; $a_5 = 20{,}9$.
144. $x = 16°2'$.
145. 59°2′.

146. $60°57'$.

147. $A=73°$, $b=16,16$, $c=26,0$;
$A=75°$, $b=12,52$, $c=15,33$;
$A=139°$, $b=0,1168$; $c=0,1979$;
$A=165°$, $b=35,7$, $c=71,1$.

148. $C=35°$, $b=190,9$ $c=116,5$;
$C=64°$, $b=0,781$, $c=0,788$;
$C=23°$, $b=18,9$; $c=14,34$;
$C=174°$, $b=0,854$, $c=1,462$.

149. 1) $B=53°39'$, $C=106°21$, $c=252,5$;
$B=126°21'$, $C=33°39'$, $c=145,8$;
2) $B=27°24'$, $C=140°36'$, $c=13,03$;
$B=152'36'$, $C=15°24'$, $c=5,45$;
3) $B=90°$, $C=70°$, $c=50,3$;
4) Решения не существует [против 0,15 читаем на шкале S $6°4'$; так как $0,15>0,06$, то угол B должен равняться $173°56'$ $(=180°-6°4')$, но тогда $A+B>180°$].

150. 1,494; 2,73; 3,84; 7,92.

151. 2,55; 5,76; 7,66.

152. 11,29; 38,2; 15,64.

153. 1,192; 1,907; 9,13; 21,9.

154. 8,14; 1,881; 1,483; 2,84.

155. 0,919; 0,605; 0,445; 0,347; 0,281; 0,231; 0,193; 0,162.

156. $BO=22,1$ *м*; $CO=34,2$ *м*; $DO=29,5$ *м*.

160. Косеканс угла, отмеченного чёрточкой S на шкале S.

162. $2,06\cdot10^3$ минут; $1,238\cdot10^5$ секунд.

163. $68,8'=1°8,8'$; $602'=10°2'$; $3644'=60°44'$; $2857'=47°37'$.

164. $619''=10'19''$; $282''=4'42''$; $1,073''\cdot10^5$.

165. $2°55'\approx3°$.

166. 1,005; 0,424; 0,1847.

167. 0,0467; 0,01676; 0,000714.

170. 0,001028; 0,00766; 0,00509; 0,00873;

171. $1,493\cdot10^8$ *км*.

172. $x+\frac{8,5}{x}=15,5$; $x+\frac{2,96}{x}=-1,85$, $x-\frac{1,173}{x}=2,05$.

186. 1) $x=1,909$, $y=1,387$; 2) $x=-5,98$, $y=5,2$; 3) $x=-6,04$, $y=-0,264$; 4) $x=-0,0994$, $y=1,312$.

187. 1) $\varphi=71°37'$, $r=4,1837$;
2) $\varphi=117°22'$, $r=35,47$;
3) $\varphi=183°6'$, $r=5,728$;
4) $\varphi=324°38'$, $r=2,919$.

188. $8,60e^{0,951i}$; $3,98e^{2,01i}$; $1,836e^{4,2i}=1,836e^{-2,08i}$; $0,611e^{4,65i}=0,611e^{-1,66i}$.

191. 1) 5,38; 2) 7,05; 3) 6,18; 4) 2,71; 5) 1,449; 6) 1,36.

192. 1) 2,31; 2) 0,812; 3) 2,18.

193. 1) В начале и в конце шкал CF и DF стоит число π. 2) Единица на шкале CF стоит против числа π на шкале C. 3) Никакой разницы нет. Шкалы C и CF, D и DF разделены одинаково.

202. 2,96; 3,62; 4,45; 10,8; 12,6; 17,5; 22,0; 37,0; 53; 74; 120; 240; 370; 750; 2400; 3800.

209. 1,113; 1,159; 1,218; 1,316; 1,455; 1,63; 1,86; 2,10; 2,24.

212. 1,0103; 1,0138; 1,0182; 1,0238; 1,0294; 1,0436; 1,0625; 1,0835.

217. 0,872; 0,818; 0,765; 0,615; 0,525; 0,315; 0,235; 0,125; 0,044; 0,032; 0,018; 0,0085; 0,00215.

220. 0,9989; 0,9984; 0,9973; 0,9963; 0,9954; 0,9906; 0,984; 0,971; 0,951; 0,946; 0,937.

221. Шкала A является шкалой квадратов чисел шкалы D. Ясно, что изменению величины числа шкалы D в 10 раз будет соответствовать на шкале A изменение в $10^2=100$ раз.

222. 3,525; 10,8; 20,5; 105; 424; $7,71\cdot10^3$; $14,8\cdot10^3$.

223. 1,1818; 1,2129; 1,339; 1,468; 1,640; 1,850; 2,226; 2,547.

224. 1,01035; 1,0555; 1,1030.

225. 0,300; 1,386; 0,708; 0,077; 0,138; 0,044, 3,912.

226. $x=1,775$.

228. 0,8386; 0,752; 0,628; 0,440; 0,393; 0,198; 0,0287; 0,000225; 0,000079.

229. 0,9982; 0,9956; 0,9822; 0,9738; 1,9305.

230. 1) Поставить против числа a на шкале D число b на шкале C. Ответ читать на шкале $LL3$ (или $LL2$, или $LL1$) против начального или конечного штриха шкалы C; 2) поставить бегунок против числа b на шкале $LL3$ (или $LL2$, или $LL1$); начало (или конец) шкалы C поставить против визирной линии бегунка. Ответ читать на шкале D против числа a шкалы C; 3) поставить бегунок против числа b на шкале $LL3$ (или $LL2$, или $LL1$); число a шкалы C поставить против визирной линии бегунка. Ответ читать на шкале D против начала (или конца) шкалы C.

231. 121,5; 1,616; 1,0429; 2,014; 3,065; 3,821.

232. $P = e^{\frac{\pi\mu}{2}} Q$. Полагая $\mu = 0{,}4$, получаем $e^{0{,}4\cdot 1{,}571} = 1{,}88$ (ответ на шкале ***LL2***!). Таким образом, $P = 1{,}88Q$.

233. Можно. Надо обычным образом вычислить при одной установке движка выражение $\frac{a \cdot b}{c}$ на шкалах ***C*** и ***D*** (см. § 17), но ответ читать не на шкале ***D***, а на шкале ***LL3*** (или ***LL2***, или ***LL1***).

234. $c = \frac{1}{2{,}65} \ln 2{,}5 = 0{,}346$.

235. 125; 1,621; 1,0495.

236. 9,31.

238. 425; 244; 73,9; 15440.

239. 135 (на шкале ***LL3***).

240. 1,925; 8,00; 4,41; 116,2; 32,9; 3,00; 18,0; 2,33; 1,362 (на шкале ***LL2***).

241. 14,06.

242. 5,49; 1,615.

243. а) 1,0550; 1,709; 210,9;
б) 1,0974; 2,533; 10,900;
в) 47,6; 1,472; 1,0393;
г) 1,1154; 2,98.

244. $x = 1{,}333$; $x = 1{,}530$; $x = 2{,}24$.

245. 5,00; 2,366; 1,762.

246. Надо использовать конечный штрих шкалы $C \cdot x = 0{,}4 = 2/5$. Очевидно, $32^{2/5} = (\sqrt[5]{32})^2 = 2^2 = 4$.

247. $x = 0{,}375$; $x = 0{,}791$; $x = 0{,}524$; $x = 7{,}53$; $x = 5{,}32$.

248. $x = 0{,}848$.

249. $x = -0{,}379$.

250. 3,12; 0,75.

254. 27,64; 19,97; 132,1; 1,361; 2,864; 21,60; 3,49.

255. 1,935; 1,0682; 736.

256. $V_2/V_1 = 4{,}22$; $T_1/T_2 = 1{,}778$.

257. 0,7275; 0,9787; 0,822; 0,1413.

258. 0,415; 0,168; 0,0036.

259. Можно; новый способ выгоднее для решения задачи 258, так как все ответы получаются с его помощью *при одной установке движка*.

260. 0,0132 (читая ответ на шкале ***LL00***, внимательно следите за ценой делений!); 0,000150.

261. Решение: $2t = 6$; $t = 3$; $e^{-3^2} = 0{,}000123$; $2e^{-t^2} = 0{,}00025$; $1 - 2e^{-t^2} = 0{,}99975$. Ответ: 0,99975.

262. 1,260; 1,325; 1,436; 1,668; 1,702.

263. 1,02532; 1,04182.

264. 28,0 (на шкале ***LL3***).

265. 1,100 (на шкале ***LL1***).

266. $3{,}77 \cdot 10^5$; $5 \cdot 10^6$; $2{,}47 \cdot 10^5$.

33 коп.

ФИЗМАТГИЗ · 1962